

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 5$  și  $a_5 = 11$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ . Determinați numărul real  $a$  știind că  $f(a) = f(a+1)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,4)$ ,  $B(-1,1)$  și  $C(3,a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care dreptele  $OC$  și  $AB$  sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Arătați că, pentru orice număr real  $x$ ,  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 2$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați perechile de numere întregi  $(m, n)$  pentru care matricea  $A(m)$  este inversa matricei  $A(n)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + 2ay$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $1 \circ 0 = 1$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$ , știind că  $x \circ 1 > 4$  dacă și numai dacă  $x \in (3, +\infty)$ .
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă  $a = \frac{1}{2}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = x$  este tangentă la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^{\pi} xf(x) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$ .