

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării  
Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 7 Martie 2009**

**CLASA a VIII-a**

**Problema 1.** Să se determine numerele reale pozitive  $x, y, z$  care verifică simultan egalitățile  $x^2y^2 + 1 = x^2 + xy$ ,  $y^2z^2 + 1 = y^2 + yz$  și  $z^2x^2 + 1 = z^2 + xz$ .

**Problema 2.** Numerele reale  $a, b, c, d, e$  au proprietatea că

$$|a - b| = 2|b - c| = 3|c - d| = 4|d - e| = 5|e - a|.$$

Să se arate că numerele  $a, b, c, d, e$  sunt egale.

**Problema 3.** Considerăm prisma patrulateră regulată  $ABCD A' B' C' D'$  în care  $AB = a$ ,  $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , iar  $M$  este mijlocul muchiei  $B'C'$ . Fie  $F$  piciorul perpendicularei din  $B$  pe dreapta  $MC$ . Să se determine măsura unghiului dintre planele  $(BFD)$  și  $(ABF)$ .

**Problema 4.** Numerele naturale  $a$  și  $b$  verifică relația

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \quad (1)$$

- Să se arate că  $|a - 3b| \geq 1$ .
- Să se determine toate perechile de numere naturale  $(a, b)$  care satisfac relația (1).

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunțurilor  
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării  
Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 7 Martie 2009**

**CLASA a VIII-a, SOLUȚII ȘI BAREMURI**

**Problema 1.** Să se determine numerele reale pozitive  $x, y, z$  care verifică simultan egalitățile  $x^2y^2 + 1 = x^2 + xy$ ,  $y^2z^2 + 1 = y^2 + yz$  și  $z^2x^2 + 1 = z^2 + xz$ .

**Soluție** Deoarece  $x^2y^2 + 1 \geq 2xy$ , rezultă  $x^2 \geq xy$  și analog  $y^2 \geq yz$ ,  $z^2 \geq zx$ . . . . . **3 puncte**

Dacă unul dintre numere, spre exemplu  $x$ , ar fi egal cu 0, înlocuind în prima relația am avea  $1 = 0$ , fals, deci  $x, y, z$  sunt nenule. . . . . **1 punct**

Atunci  $x \geq y \geq z \geq x$ , deci  $x = y = z$ . . . . . **2 puncte**

Obținem  $x^4 + 1 = 2x^2$ , de unde  $x = 1$  și apoi  $x = y = z = 1$ . . . **1 punct**

**Problema 2.** Numerele reale  $a, b, c, d, e$  au proprietatea că

$$|a - b| = 2|b - c| = 3|c - d| = 4|d - e| = 5|e - a|.$$

Să se arate că numerele  $a, b, c, d, e$  sunt egale.

**Soluție.** Fie  $k$  valoarea comună a modulelor. Atunci  $a - b = \pm k$ ,  $b - c = \pm \frac{1}{2}k$ ,  $c - d = \pm \frac{1}{3}k$ ,  $d - e = \pm \frac{1}{4}k$  și  $e - a = \pm \frac{1}{5}k$  (pentru anumite alegeri a semnelor  $+$  și  $-$ ). . . . . **3 puncte**

Dacă  $k = 0$ , problema este rezolvată. . . . . **1 punct**

Pentru  $k \neq 0$ , prin adunarea relațiilor obținem  $0 = (\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5})k$ , deci  $\frac{1}{5} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}$ , pentru o alegere a semnelor. . . . . **1 punct**

Pentru orice alegere a semnelor, ultima egalitate revine la  $\frac{1}{5} = \frac{m}{12}$ , cu  $m$  întreg, deci 5 divide 12, contradicție. . . . . **2 puncte**

**Problema 3.** Considerăm prisma patrulateră regulată  $ABCD A' B' C' D'$  în care  $AB = a$ ,  $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , iar  $M$  este mijlocul muchiei  $B' C'$ . Fie  $F$  piciorul perpendicularei din  $B$  pe dreapta  $MC$ . Să se determine măsura unghiului dintre planele  $(BFD)$  și  $(ABF)$ .

**Soluție.** Planele  $(BFD)$  și  $(ABF)$  se taie după dreapta  $BF$ . Muchiile  $AB$  și  $DC$  sunt perpendiculare pe planul  $(BCC')$ , deci și pe dreapta  $BF$ . **1 punct**

Dreapta  $BF$  este perpendiculară pe  $DC$  și pe  $FC$  - din ipoteză - deci pe planul  $(DFC)$  și implicit pe  $DF$ . . . . . **2 puncte**

Avem  $AB \subset (ABF)$ ,  $AB \perp BF$  și  $DF \subset (DBF)$ ,  $DF \perp BF$ , deci măsura unghiului dintre planele  $(BFD)$  și  $(ABF)$  este măsura unghiului dintre dreptele  $AB$  și  $DF$ , adică  $\angle FDC$ , deoarece  $AB \parallel DC$ . . . . . **2 puncte**

Obținem din relația lui Pitagora că  $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . . . . . **1 punct**

În triunghiul dreptunghic  $FDC$  avem  $\text{tg}\angle FDC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , deci măsura unghiului dintre cele două plane este de  $30^\circ$ . . . . . **1 punct**

**Problema 4.** Numerele naturale  $a$  și  $b$  verifică relația

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \quad (1)$$

a) Să se arate că  $|a - 3b| \geq 1$ .

b) Să se determine toate perechile de numere naturale  $(a, b)$  care satisfac relația (1).

**Soluție.** a) Dacă prin absurd  $|a - 3b| < 1$ , din  $|a - 3b| \in \mathbb{N}$  obținem  $|a - 3b| = 0$ . . . . . **1 punct**

Atunci  $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = -33b \neq 16$ . . . . . **1 punct**

b) Deoarece  $(a - 3b)^2 \geq 1$ , avem  $16 + 33b = (a^2 - 9b^2)^2 = (a + 3b)^2(a - 3b)^2 \geq (a + 3b)^2 \geq 9b^2$ . . . . . **1 punct**

De aici rezultă că  $b \leq 4$ , deoarece  $b \geq 5$  implică  $9b^2 \geq 45b = 33b + 12b > 33b + 16$ . . . . . **1 punct**

Atunci  $b$  este 0, 1, 2, 3 sau 4 și deci  $33b + 16 = 16, 49, 82, 115$  sau 148, respectiv. . . . . **1 punct**

Cum  $33b + 16$  este pătrat perfect, . . . . . **1 punct**

rămân doar soluțiile  $b = 0$  și  $a = 2$  sau  $b = 1$  și  $a = 4$ ; în alte cuvinte, vom obține perechile  $(a, b) = (2, 0)$ , respectiv  $(4, 1)$ . . . . . **1 punct**