Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z-2\overline{z}=-2+6i$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1)=\log_5(3x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\dots,20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de $30°$. Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\0&m&1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(m)+A(-m)\big)=8$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\big(A(-1)-A(0)\big)$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\big(x*(-x)\big)*\big((-x)*x\big)=24x$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)^{2x}$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^{e}x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.