Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge1}$ cu $b_2=2$ și $b_4=4$. Determinați b_6.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y=3x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^{x+1}-3=0$.

5p **4.** Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.

5p **5.** Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}=\vec{0}$.

5p **6.** Demonstrați că, în orice triunghi ABC, are loc relația $AB+AC+BC=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

5p **a)** Arătați că $5*10=17$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Arătați că, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, pentru orice primitivă F a funcției f.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$	**3p**
	$b_6 = 8$	**2p**
2.	$x_V = 1$, $y_V = m-1$, unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției f	**2p**
	$y_V = 3x_V \Leftrightarrow m-1=3$, deci $m=4$	**3p**
3.	$2^{2x} - 2\cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x+1)(2^x-3)=0$	**3p**
	Cum $2^x > 0$, obținem $x = \log_2 3$	**2p**
4.	Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$, unde a și b sunt cifre distincte	**2p**
	Sunt $9\cdot 9=81$ de numere de forma $\overline{aab}$, $9\cdot 9=81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9\cdot 9=81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu a și b cifre distincte, deci numărul cerut este $81\cdot 3=243$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{MB'}$, unde M este mijlocul segmentelor AB, respectiv $A'B'$	**2p**
	$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$	**3p**
6.	$2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$	**2p**
	$BC = 2R\sin A,\ AC = 2R\sin B$ și $AB = 2R\sin C \Rightarrow AB+AC+BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0+2+0-0-0-1 = 1$	**3p**
b)	$\det(X(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b-a$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	Pentru $a \neq b$, $\det(X(a,b)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
c)	Dacă $a \neq b$, sistemul are soluția unică $(0,2,-1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a\cdot 0 = 3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Dacă $a=b$, sistemul are soluțiile $(\alpha,\ 2+a\alpha,\ -1-a\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = (2+a\alpha)^2 - (-1-a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$5*10 = (5-1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$	**3p**
	$= 4^2 + 1 = 17$	**2p**

b)	$x*e=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}+1=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}=x-1$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem $\log_3(e-1)=1$, deci $e=4\in M$	**3p**
	Cum $4*x=3^{\log_3(x-1)}+1=(x-1)+1=x$, pentru orice $x\in M$, obținem că $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*x=(x-1)^{\log_3(x-1)}+1$, $x*x*x=(x-1)^{\log_3^2(x-1)}+1$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	Cum $x\in M$, $(x-1)^{\log_3(x-1)}=(x-1)^{\log_3^2(x-1)} \Rightarrow \log_3(x-1)=\log_3^2(x-1)$, deci $\log_3(x-1)=0$ sau $\log_3(x-1)=1$ și, cum $x>2$, obținem $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+4x^3}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left(e^{2x}+2x^3\right)}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este egală cu $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Cum dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, obținem că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$	**3p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{2x}+2x^3 \Rightarrow g'(x)=2e^{2x}+6x^2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ și g este continuă, există un unic număr real c cu $g(c)=0$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c]$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c,+\infty)$, deci f are un unic punct de extrem	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+3-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}>0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este strict crescătoare	**2p**
c)	$\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx=\int_a^b F^2(x)F'(x)dx=\frac{1}{3}F^3(x)\Big\vert_a^b=\frac{1}{3}\left(F^3(b)-F^3(a)\right)$	**3p**
	Cum F este strict crescătoare, obținem că $F(a)<F(b)$, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, deci $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$	**2p**