

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{pedagogic}$

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_4 = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + a - 2$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $f(1) + f(-2) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + \log_6(2x + 6) = 3$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să poată fi scris sub forma n^3 , unde n este număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(0,6)$, $C(4,2)$ și punctul D , mijlocul segmentului BC . Determinați ecuația dreptei AD .
- 5p** 6. Calculați $2 \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \cos 120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1$.

- 5p** 1. Arătați că $2 * (-5) = -2$.
- 5p** 2. Verificați dacă $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** 3. Determinați numărul real a pentru care $a * 5 = 3$.
- 5p** 4. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * (1 - x) \geq -5$.
- 5p** 5. Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care numărul $N = (\sqrt{n} + 1) * (\sqrt{n} + 1)$ este natural par.
- 5p** 6. Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m < n < p$, pentru care $m * n * p = 8$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(n) = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori } A}$, unde n este număr natural nenul.

- 5p** 1. Arătați că $\det A = 4$.
- 5p** 2. Arătați că $\det(A + xI_2) \geq 3$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Arătați că există un număr real a , astfel încât $B(3) = aI_2$.
- 5p** 4. Determinați numerele reale m pentru care $\det(2mA + I_2) + 2m \det(A - I_2) = 0$.
- 5p** 5. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot M = M \cdot A$. Arătați că $x + y + 3z - t = 0$.
- 5p** 6. Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , matricea $B(6n)$ are toate elementele numere naturale.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$5 = \frac{1}{2} + 3r \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$, unde r este rația progresiei $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3r = 6$	2p 3p
2.	$f(1) = 2a - 2$, $f(-2) = -a - 2$, pentru orice număr real a $2a - 2 - a - 2 = 0$, deci $a = 4$	2p 3p
3.	$\log_6(2x + 6) = 2 \Rightarrow 2x + 6 = 6^2$ $2x + 6 = 36 \Rightarrow x = 15$, care convine	3p 2p
4.	Sunt 10 de numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile Sunt 3 numere naturale de o cifră care pot fi scrise sub forma n^3 , deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{10}$	2p 2p 1p
5.	$D(2, 4)$ Ecuația dreptei AD este $y = x + 2$	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ $2 \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \cos 120^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	$2 * (-5) = \frac{(2-1)(-5-1)}{2} + 1 =$ $= -3 + 1 = -2$	3p 2p
2.	$x * 3 = \frac{(x-1)(3-1)}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$, pentru orice număr real x $3 * x = \frac{(3-1)(x-1)}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
3.	$a * 5 = 2(a-1) + 1 = 2a - 1$, pentru orice număr real a $2a - 1 = 3$, deci $a = 2$	3p 2p
4.	$x * (1-x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2}$, pentru orice număr real x $\frac{-x^2 + x + 2}{2} \geq -5 \Leftrightarrow -x^2 + x + 12 \geq 0$, de unde obținem $x \in [-3, 4]$	2p 3p

5.	$N = (\sqrt{n} + 1) * (\sqrt{n} + 1) = \frac{n}{2} + 1$, pentru orice număr natural n	2p
	De exemplu, pentru $n = 4k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$, obținem că $N = 2(k + 1)$, care este număr natural par	3p
6.	$m * n * p = \frac{(m-1)(n-1)(p-1)}{4} + 1$, pentru orice numere naturale m, n și p	3p
	$\frac{(m-1)(n-1)(p-1)}{4} + 1 = 8 \Leftrightarrow (m-1)(n-1)(p-1) = 28$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, obținem tripletele $(2, 5, 8)$ și $(2, 3, 15)$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 =$	3p
	$= 1 + 3 = 4$	2p
2.	$A + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 3 \\ -1 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_2) = \begin{vmatrix} 1+x & 3 \\ -1 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)(1+x) - 3 \cdot (-1) =$	3p
	$= (1+x)^2 + 3 \geq 3$, pentru orice număr real x	2p
3.	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B(3) = (A \cdot A) \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8I_2$	3p
	$-8I_2 = aI_2$, de unde obținem $a = -8$	2p
4.	$\det(2mA + I_2) = \begin{vmatrix} 2m+1 & 6m \\ -2m & 2m+1 \end{vmatrix} = 16m^2 + 4m + 1$ și $2m \det(A - I_2) = 6m$, pentru orice număr real m	3p
	$16m^2 + 10m + 1 = 0$, de unde obținem $m = -\frac{1}{2}$ sau $m = -\frac{1}{8}$	2p
5.	$A \cdot M = \begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ -x+z & -y+t \end{pmatrix}$, $M \cdot A = \begin{pmatrix} x-y & 3x+y \\ z-t & 3z+t \end{pmatrix}$, unde x, y, z și t sunt numere reale	2p
	$A \cdot M = M \cdot A \Rightarrow 3z = -y$ și $t = x$, de unde obținem $x + y + 3z - t = x + y - y - x = 0$	3p
6.	$B(3) = -8I_2$, deci $B(6n) = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A \cdot A \cdot A}_{\text{de } 6n \text{ ori } A} = \underbrace{B(3) \cdot B(3) \cdot \dots \cdot B(3)}_{\text{de } 2n \text{ ori } B(3)} = (-8)^{2n} I_2$, unde n este număr natural nenul	3p
	$B(6n) = 64^n I_2$, deci $B(6n)$ are toate elementele numere naturale, pentru orice număr natural nenul n	2p