

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - z - i = -1$.
- 5p** 2. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2 - 3x + 3 - n = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(4,2)$ și $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x - \sin(\pi - x) + \cos x + \cos(\pi - x) + \operatorname{tg} 2x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A + I_3) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot A \cdot A = O_3$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c , astfel încât $X = aI_3 + bA + cA \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.
- 5p** a) Arătați că $(5 * 2) * 1 = 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Demonstrați că $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, pentru orice numere reale a, b și c .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x - 1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f^2(x) dx = 4$.

5p b) Calculați $\int_0^1 \ln(f(x)) dx$.

5p c) Demonstrați că există un singur număr real x , $x \in [0, +\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021$.