

OLIMPIADA PE SCOALA

CLASA 10

27.02.2021



1 PROBLEME

1. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat $f(g(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci:
(A) f este injectiva
(B) g este injectiva
(C) f este bijectiva
(D) g este surjectiva
(E) g este inversabila
2. Rezultatul expresiei $3^{1-\log_3 10} - 4^{1-\log_4 5} + 6^{\log_6 9-1}$ este
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) -1
3. Rezultatul expresiei $\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{3}+1) + \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{3}+1)$ este:
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) -1
4. Fie $a, b \in (0, 1)$. Valoarea minima a expresiei $\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$ este:
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\lg 2$ (E) $2\lg 2$
5. Rezultatul calcului $[\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \dots + [\lg 10^{2021}]$ este:
(A) Multiplu de 9
(B) Congruent cu 1 modulo 9
(C) Congruent cu 2 modulo 9
(D) Congruent cu 4 modulo 9
(E) Congruent cu 5 modulo 9
6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.i. $45^a = 5$ si $45^b = 3$. $16^{\frac{1-a-b}{1-a}} = x$.
(A) $x = 1$
(B) $x = 2$
(C) $x = 4$
(D) $x = \frac{1}{4}$
(E) $x = \frac{1}{2}$
7. Fie $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$, $f(n) = \{n\sqrt{2}\}$. Atunci:
(A) f inversabila
(B) f este injectiva
(C) f este surjectiva
(D) f este crescatoare
(E) f este periodica

8. Fie $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ unde } i^2 = -1\}$. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $f(x+iy) = x + (-1)^{x+y}$.
- (A) f nu e surjectiva
 - (B) f e injectiva
 - (C) f e bijectiva
 - (D) f e surjectiva
 - (E) f e marginita
9. Pentru fiecare numar intreg a definim functia $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = x + [ax]$.
Fie $M = \{a \in \mathbb{Z} \mid f_a \text{ injectiva}\}$. Atunci:
- (A) $M = \mathbb{Z}$
 - (B) M e finita
 - (C) $M = \emptyset$
 - (D) $\mathbb{Z} - M$ finita
 - (E) $\mathbb{Z} - M$ e infinita
10. Fie $M = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}\}$. Atunci:
- (A) $|M|$ este par
 - (B) M e infinita
 - (C) $M = \emptyset$
 - (D) $|M|$ impar
 - (E) M are maxim 3 elemente
11. Fie $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2(4^x + 2^x - 4) = x + 2\}$. Atunci:
- (A) M este nemarginita
 - (B) $M = \emptyset$
 - (C) $|M| = 2$
 - (D) $|M| = 1$
 - (E) M are cel putin 4 elemente
12. Fie $a, b \in (1, \infty)$ a.i. $\log_a b + \log_b a \in \mathbb{Q}$. Atunci numarul $(\log_a b)^{2021} + (\log_b a)^{2021}$ este:
- (A) rational
 - (B) irational
 - (C) 2^{2021}
 - (D) 2
 - (E) 2^{2020}

13. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi.
Daca $a \cdot \lg\left(\frac{a^2}{bc}\right) + b \cdot \lg\left(\frac{b^2}{ac}\right) + c \cdot \lg\left(\frac{c^2}{ab}\right) = 0$, atunci triunghiul:
- (A) este dreptunghic
(B) este obtuzunghic
(C) este echilateral
(D) are un unghi de 120
(E) are un unghi de 150
14. Fie $z_1, z_2 \in C^*$ astfel incat $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$. Fie $A = \left\{ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2021n} \mid n \in N \right\}$.
Atunci:
- (A) $|A| = 1$
(B) $|A| = 2$
(C) $|A| = 3$
(D) $|A| = 2021$
(E) A este infinita.
15. Fie $a, b \in C$. Atunci $|a + b|^2 + |a - b|^2$ este egal cu:
- (A) $|a|^2 + |b|^2$
(B) $(|a| + |b|)^2$
(C) $2(|a|^2 + |b|^2)$
(D) $2(|a| + |b|)^2$
(E) $(|a| + |b|)^4$
16. Fie $A = \{z \in C \mid |z| = 1 \text{ si } |z + 1| = 1\}$. Suma elementelor multimii A este
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) -2
17. Numarul functiilor $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care verifica faptul ca $3f(f(x)) - 7f(x) + 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ este egal cu:
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 7
18. Fie $A = \{x \in (1, \infty) \mid 2^{x^2 - 3x + 3} = \log_x(3x - 2)\}$. Suma elementelor lui A este:
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 7
19. Fie $A = \{x \in R \mid (1 + x^{\frac{2}{x}})^{\frac{x}{2}} = 3^{\log_2 x}\}$. Suma elementelor lui A este:
- (A) 16 (B) 8 (C) 2 (D) 6 (E) 4

20. Fie $A = \{ x \in R \mid (\sqrt{2}\cos x)^{\operatorname{ctgx}} = (\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x} \}$ Atunci:

- (A) $A = \emptyset$
- (B) A e infinita
- (C) $|A| = 1$
- (D) $|A| = 2$
- (E) $|A| = 3$