Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM) 2020-2021

Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-IX-a

- Subiecte -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 107

Problema 2

Să se determine suma soluțiilor ecuației: $|x| + |x+2| = 3$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

Problema 3

Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|9 - |2x-1|| \leq 4$ este egală cu:

a) -4 b) 8 c) 0 d) 5 e) 11

Problema 4

Să se determine numărul de elemente al mulțimii: $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle/ \frac{x+4}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 5

Fie $A = \left\{ \sum_{k=1}^{n^2+4n+3} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \middle/ n \in \mathbb{N} \right\}$. Atunci:

a) $A \subset R \backslash Q$ b) $A \subset \{2n+1/n \in \mathbb{N}^*\}$ c) $A \subset \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

d) $A = \mathbb{N}^*$ e) $A \subset Q \backslash \mathbb{Z}$

Problema 6

Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor $a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5}$, $b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}$, $c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$

a) a, b, c b) c, b, a c) a, c, b d) b, a, c e) c, a, b

Problema 7

Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0$ să aibă cel puțin o soluție reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ d) $2 \pm \sqrt{2}$ e) $-2.1 \pm \sqrt{2}$

Problema 8

Soluțiile inecuației $\left(a \cdot \frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a \cdot \frac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, unde $x, y > 0$ și $a, b > 0$ sunt:

a) $x = y = 1$ b) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ c) $x = y > 0$ d) $x \geq 1, y \geq 1$ e) $x, y \in \mathbb{N}$

Problema 9

Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației: $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) O infinitate

Problema 10

Se consideră ecuația: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui x. Atunci ecuația:

a) Nu are soluții

b) Are două soluții

c) Are soluții întregi

d) Are soluții iraționale

e) Are o infinitate de soluții

Problema 11

Fie numerele reale a, b, c cu $a^2 + b^2 + c^2 = 21$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $a - 2b + 3c$

a) $2\sqrt{21}$ b) $3\sqrt{21}$ c) $6\sqrt{21}$ d) $6\sqrt{7}$ e) $7\sqrt{6}$

Problemele 12, 13 și 14 au în comun următorul enunț:

Fie mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Câte submulțimi ale lui A satisfac cerințele:

Problema 12

Nu conțin numere pare

a) 64 b) 32 c) 60 d) 16 e) 20

Problema 13

Conțin cel puțin un număr impar

a) 31 b) 63 c) 992 d) 512 e) 256

Problema 14

Conțin atât numere pare cât și numere impare

a) 512 b) 960 c) 961 d) 962 e) 1024

Problema 15

Pentru orice trei puncte A, B, C din plan este verificată una din egalitățile:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

d) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ e) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

Problema 16

Fie A, B, C un triunghi și punctele M, N definite prin $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ atunci:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC})$ b) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{3}$

Problema 17

În planul XOY se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = m\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ unde $m \in \mathbb{R}$. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă:

a) $m = 1$ b) $m = -\frac{1}{2}$ c) $m = -1$ d) $m = 2$ e) $m = -\frac{1}{5}$

Problema 18

Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ fie respectiv punctele D și E astfel că $AB = 3AD$ și $AC = 2AE$ iar $DE \cap AM = \{F\}$. Să se determine $k \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AF}$.

a) 1 b) 2 c) 5 d) -1 e) 4

Problema 19

Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC, iar H ortocentrul său. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = m \cdot \overrightarrow{OG}$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) 3 b) -3 c) -6 d) 0 e) $-\frac{1}{3}$

Problema 20

Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Dacă $\overrightarrow{AD} = m \cdot \overrightarrow{BF} + n \cdot \overrightarrow{BD}, m, n \in \mathbb{R}$ atunci $m + n$ are valoarea:

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{2}{3}$ d) 2 e) $-\frac{1}{3}$

Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM) 2020-2021

Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-IX-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Soluții

Problema 1

Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 107

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 2

Să se determine suma soluțiilor ecuației: $|x| + |x + 2| = 3$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 3

Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|9 - |2x - 1|| \leq 4$ este egală cu:

a) -4 b) 8 c) 0 d) 5 e) 11

Supliment GM

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 4

Să se determine numărul de elemente al mulțimii: $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle/ \dfrac{x+4}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ .... $1p$

Problema 5

Fie $A = \left\{ \sum_{k=1}^{n^2+4n+3} \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \middle/ n \in \mathbb{N} \right\}$. Atunci:

a) $A \subset R \backslash Q$ b) $A \subset \{2n + 1 / n \in \mathbb{N}^*\}$ c) $A \subset \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$

d) $A = \mathbb{N}^*$ e) $A \subset Q \backslash \mathbb{Z}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 6

Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor $a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5}$, $b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}$, $c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$

a) a, b, c b) c, b, a c) a, c, b d) b, a, c e) c, a, b

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 7

Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0$ să aibă cel puțin o soluție reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ d) $2 \pm \sqrt{2}$ e) $-2.1 \pm \sqrt{2}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 8

Soluțiile inecuației $\left(a \cdot \frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a \cdot \frac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, unde $x, y > 0$ și $a, b > 0$ sunt:

a) $x = y = 1$ b) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ c) $x = y > 0$ d) $x \geq 1, y \geq 1$ e) $x, y \in \mathbb{N}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 9

Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației: $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) O infinitate

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 10

Se consideră ecuația: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui x. Atunci ecuația:

a) Nu are soluții

b) Are două soluții

c) Are soluții întregi

d) Are soluții iraționale

e) Are o infinitate de soluții

Supliment GM

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ 1p

Problema 11

Fie numerele reale a, b, c cu $a^2 + b^2 + c^2 = 21$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $a - 2b + 3c$

a) $2\sqrt{21}$ b) $3\sqrt{21}$ c) $6\sqrt{21}$ d) $6\sqrt{7}$ e) $7\sqrt{6}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ 1p

Problemele 12, 13 și 14 au în comun următorul enunț:

Fie mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Câte submulțimi ale lui A satisfac cerințele:

Problema 12

Nu conțin numere pare

a) 64 b) 32 c) 60 d) 16 e) 20

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 1p

Problema 13

Conțin cel puțin un număr impar

a) 31 b) 63 c) 992 d) 512 e) 256

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 1p

Problema 14

Conțin atât numere pare cât și numere impare

a) 512 b) 960 c) 961 d) 962 e) 1024

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 1p

Problema 15

Pentru orice trei puncte A, B, C din plan este verificată una din egalitățile:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

d) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ e) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 1p

Problema 16

Fie A, B, C un triunghi și punctele M, N definite prin $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ atunci:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC})$ b) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{3}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ .... $1p$

Problema 17

În planul XOY se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = m\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ unde $m \in \mathbb{R}$. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă:

a) $m = 1$ b) $m = -\frac{1}{2}$ c) $m = -1$ d) $m = 2$ e) $m = -\frac{1}{5}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ .... $1p$

Problema 18

Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ fie respectiv punctele D și E astfel că $AB = 3AD$ și $AC = 2AE$ iar $DE \cap AM = \{F\}$. Să se determine $k \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AF}$.

a) 1 b) 2 c) 5 d) -1 e) 4

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 19

Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC, iar H ortocentrul său. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = m \cdot \overrightarrow{OG}$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) 3 b) -3 c) -6 d) 0 e) $-\frac{1}{3}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 20

Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Dacă $\overrightarrow{AD} = m \cdot \overrightarrow{BF} + n \cdot \overrightarrow{BD}, m, n \in \mathbb{R}$ atunci $m + n$ are valoarea:

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{2}{3}$ d) 2 e) $-\frac{1}{3}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$