Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM) 2020-2021

Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-X-a

- Subiecte -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Subiecte

Problema 1

Soluțiile ecuației $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ sunt:

a) $\{\pm 1\}$ b) $\{\pm 2\}$ c) $\{\pm\sqrt{2}\}$ d) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ e) $\{\pm 4\}$

Problema 2

Să se rezolve ecuația: $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt[3]{10}$ b) $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{10}$ c) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[3]{10^{-1}}$

d) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10^{-1}}$ e) nu admite soluții

Problema 3

Să se rezolve inecuația: $9^x - 5\cdot 3^x + 6 < 0$

a) $x \in (2,3)$ b) $x \in (0,3)\cup(3,\infty)$ c) $x \in (1,\infty)$

d) $x \in \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}, 1\right)$ e) $x = 3$

Problema 4

Cea mai mare valoare pe care o poate lua funcția: $f:(0,\infty)\to R$,

$$f(x) = (\log_3 x)^2 + 2(\log_3 x)\cdot\left(\log_3 \frac{9}{x}\right)$$

este:

a) 100 b) 10 c) 1 d) 4 e) 64

Problema 5

Fie $a \in (0,1)$ și numerele $m = a^{1+\sqrt{6}}$ și $n = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Atunci:

a) $m > n$ b) $m+n=2$ c) $m+n>2$

d) $m < n$ e) $m^{1+\sqrt{6}} = n^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Problema 6

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4^x - 6^x + 9^x}{4^x + 6^x + 9^x}$. Notăm $I = f(\mathbb{R})$. Atunci:

a) $I = [0,1]$ b) $I = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ c) $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ d) $I = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ e) $I = (0,1)$

Problema 7

Să se rezolve inecuația $\log_x(3x) \leq 2$

a) $x \in (0,1) \cup [3,\infty)$ b) $x \in (3,\infty)$ c) $x = 3$

d) $x \in (0,3)$ e) $x = 1$

Problema 8

Fie $A \subset \mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor inecuației $2^{\sqrt{4-x}} < 4^{\frac{x}{2}}$. Atunci:

a) $A = \left(-\infty, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ b) $A = (0,\infty)$ c) $A = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 4\right]$

d) $A = (0,4)$ e) $A = (-\infty, 4)$

Problema 9

Determinați mulțimea:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle/ \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right\}$$

a) $A = \left(0, \frac{4}{5}\right)$ b) $A = (0,4)$ c) $A = (0,2)$

d) $A = \emptyset$ e) $A = \left(0, \frac{4}{5}\right] \cup \{2\}$

Problema 10

Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x} + \sqrt[3]{8-x} = 2$ este:

a) 0 b) 10 c) 25 d) -25 e) 27

Problema 11

Produsul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[3]{x^3+7} + \sqrt[3]{x+7} = 4$ este:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) -1 e) 4

Problema 12

Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației: $\frac{2^x}{x} + x \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 4$ atunci:

a) $S \subset [1,3)$ b) $S \subset (0,1)$ c) $S = \{2,7\}$ d) $S = \emptyset$ e) $S = \mathbb{R}$

Problema 13

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fie funcția $f = \begin{cases} ax+2, & x \leq 1 \\ x+2a, & x > 1 \end{cases}$ și fie $A = \{a \in \mathbb{R}/f$ este injectivă$\}$ și $B = \{a \in \mathbb{R}/f$ este surjectivă$\}$. Atunci:

a) $A = [2, \infty), B = (0, 1]$ b) $A = [-1, 1), B = (0, 1]$ c) $A = [1, \infty), B = (0, 1]$

d) $A = [1, \infty), B = (-1, 1]$ e) $A = [1, \infty), B = (0, 2]$

Problema 14

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4$. Să se determine funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă

$$\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(x) = \frac{3}{2}x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

a) $g(x) = -\frac{3}{2}x + 1$ b) $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ c) $g(x) = \frac{5}{2}x - 1$

d) $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ e) nu există g cu proprietatea din enunt.

Problema 15

Fie $a \in (1, \infty)$ și numerele $x = \sqrt[4^n-1]{(\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{a})^{2^n}}$ și $y = \sqrt[n]{(\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n(n+1)]{a})^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Precizați dacă:

a) $x > y$ b) $x^{2^n+1} = y$ c) $xy < 1$ d) $xy > 1$ e) $x = y$

Problema 16

Să se calculeze $E = \left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c}$ pe domeniul de existență:

a) $E = 0$ b) $E = 2$ c) $E = 10$ d) $E = 1$ e) $E = \frac{1}{10}$

Problema 17

Fie $a = \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{9}$ și $b = 4\sqrt[4]{\frac{1}{162}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{32}} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$. Atunci:

a) $a < b$ b) $a = b$ c) $a > b$ d) $a + b = 2$ e) $a + b = 0$

Problema 18

Mulțimea valorilor lui x pentru care există simultan expresiile: $\sqrt[3]{\frac{1}{4-x^2}}$ și $\log_2 \sqrt{-x^2 - x + 6}$

a) $\emptyset$ b) $(-3, 2)\backslash\{-2\}$ c) $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$ d) $(-3, 2)$ e) $\mathbb{R}^*$

Problema 19

Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_x(x^2+2x)+\log_{x^2}(x+2)=4$ atunci

a) $S\subset(0,2)$ b) $S\subset[2,\infty)$ c) $S=\{4,5\}$

d) $S=\emptyset$ e) $S=(0,\infty)-\{1\}$

Problema 20

Mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}$ este:

a) $\left[\frac{5}{2},\infty\right)$ b) $(3,\infty)$ c) $\emptyset$ d) $[6,8]$ e) $\left[\frac{5}{2},3\right)$

Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-X-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Soluții

Problema 1

Soluțiile ecuației $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ sunt:

a) $\{\pm 1\}$ b) $\{\pm 2\}$ c) $\{\pm\sqrt{2}\}$ d) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ e) $\{\pm 4\}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 2

Să se rezolve ecuația: $3\lg^2\left(x^2\right) - \lg x - 1 = 0$

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt[3]{10}$ b) $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{10}$ c) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[3]{10^{-1}}$

d) $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10^{-1}}$ e) nu admite soluții

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 3

Să se rezolve inecuația: $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$

a) $x \in (2,3)$ b) $x \in (0,3) \cup (3,\infty)$ c) $x \in (1,\infty)$

d) $x \in \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}, 1\right)$ e) $x = 3$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 4

Cea mai mare valoare pe care o poate lua funcția: $f : (0,\infty) \to R$,

$$f(x) = (\log_3 x)^2 + 2(\log_3 x) \cdot \left(\log_3 \frac{9}{x}\right)$$

este:

a) 100 b) 10 c) 1 d) 4 e) 64

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 5

Fie $a \in (0,1)$ și numerele $m = a^{1+\sqrt{6}}$ și $n = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Atunci:

a) $m > n$ b) $m + n = 2$ c) $m + n > 2$

d) $m < n$ e) $m^{1+\sqrt{6}} = n^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 1p

Problema 6

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4^x-6^x+9^x}{4^x+6^x+9^x}$. Notăm $I=f(\mathbb{R})$. Atunci:

a) $I=[0,1]$ b) $I=\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ c) $I=\left[\dfrac{1}{3},1\right)$ d) $I=\left[\dfrac{1}{3},\infty\right]$ e) $I=(0,1)$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 1p

Problema 7

Să se rezolve inecuația $\log_x(3x)\le 2$

a) $x\in(0,1)\cup[3,\infty)$ b) $x\in(3,\infty)$ c) $x=3$

d) $x\in(0,3)$ e) $x=1$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 1p

Problema 8

Fie $A\subset\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor inecuației $2^{\sqrt{4-x}}<4^{\frac{x}{2}}$. Atunci:

a) $A=\left(-\infty,\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ b) $A=(0,\infty)$ c) $A=\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2},4\right]$

d) $A=(0,4)$ e) $A=(-\infty,4)$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 1p

Problema 9

Determinați mulțimea:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\log_9^2 x\ge\log_3^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}\right\}$$

a) $A=\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$ b) $A=(0,4)$ c) $A=(0,2)$

d) $A=\emptyset$ e) $A=\left(0,\dfrac{4}{5}\right]\cup\{2\}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ 1p

Problema 10

Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x}+\sqrt[3]{8-x}=2$ este:

a) 0 b) 10 c) 25 d) -25 e) 27

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 11

Produsul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[3]{x^3+7}+\sqrt[3]{x+7}=4$ este:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) -1 e) 4

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 12

Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației: $\dfrac{2^x}{x}+x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=4$ atunci:

a) $S\subset[1,3)$ b) $S\subset(0,1)$ c) $S=\{2,7\}$ d) $S=\emptyset$ e) $S=\mathbb{R}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 13

Pentru orice $a\in\mathbb{R}$, fie funcția $f=\begin{cases}ax+2, & x\leq 1\\ x+2a, & x>1\end{cases}$ și fie $A=\{a\in\mathbb{R}/f \text{ este injectivă}\}$ și $B=\{a\in\mathbb{R}/f \text{ este surjectivă}\}$. Atunci:

a) $A=[2,\infty),B=(0,1]$ b) $A=[-1,1),B=(0,1]$ c) $A=[1,\infty),B=(0,1]$

d) $A=[1,\infty),B=(-1,1]$ e) $A=[1,\infty),B=(0,2]$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 14

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+4$. Să se determine funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă

$$\left(f\circ g\circ f^{-1}\right)(x)=\frac{3}{2}x+1,\forall x\in\mathbb{R}$$

a) $g(x)=-\dfrac{3}{2}x+1$ b) $g(x)=\dfrac{3}{2}x-1$ c) $g(x)=\dfrac{5}{2}x-1$

d) $g(x)=\dfrac{3}{2}x+1$ e) nu există g cu proprietatea din enunt.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 15

Fie $a\in(1,\infty)$ și numerele $x=\sqrt[4^n-1]{(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{a})^{2^n}}$ și $y=\sqrt[n]{(\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n(n+1)]{a})^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Precizați dacă:

a) $x>y$ b) $x^{2^n+1}=y$ c) $xy<1$ d) $xy>1$ e) $x=y$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 16

Să se calculeze $E = \left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c}$ pe domeniul de existență:

a) $E = 0$ b) $E = 2$ c) $E = 10$ d) $E = 1$ e) $E = \frac{1}{10}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 17

Fie $a = \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{9}$ și $b = 4\sqrt[4]{\frac{1}{162}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{32}} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$. Atunci:

a) $a < b$ b) $a = b$ c) $a > b$ d) $a + b = 2$ e) $a + b = 0$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 18

Mulțimea valorilor lui x pentru care există simultan expresiile: $\sqrt[3]{\frac{1}{4-x^2}}$ și $\log_2 \sqrt{-x^2 - x + 6}$

a) $\emptyset$ b) $(-3, 2)\backslash\{-2\}$ c) $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$ d) $(-3, 2)$ e) $\mathbb{R}^*$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 19

Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_x (x^2 + 2x) + \log_{x^2}(x + 2) = 4$ atunci

a) $S \subset (0, 2)$ b) $S \subset [2, \infty)$ c) $S = \{4, 5\}$

d) $S = \emptyset$ e) $S = (0, \infty) - \{1\}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 20

Mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$ este:

a) $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ b) $(3, \infty)$ c) $\emptyset$ d) $[6, 8]$ e) $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ .... $1p$