



Olimpiada Națională Gazeta Matematică
(ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-XI-a

- Subiecte -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Subiecte

**Problema 1**

Se consideră matricile: $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A \cdot B - C$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 2

Se consideră matricile:

$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}$. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$

a) $x = 1, y = 2$

b) $x = 2, y = 1$

c) $x = -2, y = -2$

d) $x = 2, y = -1$

e) $x = 2, y = 2$

Problema 3

Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$, pentru $n \in \mathbb{N}$ impar

a) X

b) I_2

c) 0_2

d) $-X$

e) $-I_2$

Problema 4

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, $m, x \in \mathbb{R}$. Aflați mulțimea M a tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care A este inversabilă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $M = \emptyset$

b) $M = (0, \infty)$

c) $M = (2, \infty)$

d) $M = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

e) $M = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$

Problema 5

Fie $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$

a) $2^n A$

b) $(2^n - 1) A$

c) $(n - 1) A$

d) $(2^{n-1} - 1) A$

e) $n^2 A$

Problema 6

Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) $a + b + c$ b) $a^2 + b^2 + c^2$ c) $ab + bc + ac$
 d) $(a+b)(b+c)(a+c)$ e) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

Problema 7

Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

- a) 0 b) b c) c d) a e) $(a+b+c)^3$

Problema 8

Să se rezolve ecuația: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ m^2 & -m & x \end{vmatrix} = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- a) $x \in \{1\}$ b) $x \in \{1, 2, 3\}$ c) $x \in \{1, -m, m-1\}$
 d) $x \in \{2, -m, m-1\}$ e) $x \in \{1, 2, 4\}$

Problema 9

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifică relația $A^3 = pA^2 + qA$ pentru

- a) $p = -2, q = 3$ b) $p = -2, q = 2$ c) $p = 3, q = -2$
 d) $p = -3, q = 2$ e) $p = 1, q = 1$

Problema 10

Inversa matricii $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Problema 11Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2} \right)$

- a)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b)
- ∞
- c) 1 d)
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- e)
- $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Problema 12Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$

- a) 1 b) 2 c)
- ∞
- d)
- $-\frac{5}{12}$
- e) 9

Problema 13Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

- a)
- ∞
- b)
- $-\infty$
- c) -1 d)
- $-\frac{1}{4}$
- e) 1

Problema 14Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin^3 x + 1}{x^2 \cos^2 x + 1}$

- a) 0 b)
- ∞
- c) 1 d) 2 e) nu există

Problema 15Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2) \arcsin \frac{1}{2x^2 + 1}$

- a) 0 b) 1 c)
- ∞
- d)
- $\frac{1}{2}$
- e) 2

Problema 16Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x + \cos x)e^{-x^2}$.

- a)
- ∞
- b)
- $-\infty$
- c) 0 d)
- e
- e) 1

Problema 17Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n$

- a)
- $\frac{1}{2}$
- b) 0 c) 1 d) 2 e)
- ∞

Problema 18

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{4}{3}$

Problemele 19 și 20 au în comun următorul enunț:

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Problema 19

Șirul este convergent dacă și numai dacă x_0 aparține mulțimii:

- a) $[-1, 1]$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, 1]$ d) $[1, \infty)$ e) $(-1, 1)$

Problema 20

Dacă $x_0 = \frac{1}{2}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ este:

- a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) nu există e) ∞



Olimpiada Națională Gazeta Matematică
(ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-XI-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Soluții

Problema 1

Se consideră matricile: $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (3 \ -1 \ -2)$ și $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A \cdot B - C$.

- a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: c) 1p

Problema 2

Se consideră matricile:

$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}$. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$

- a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = -2, y = -2$
- d) $x = 2, y = -1$ e) $x = 2, y = 2$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 3

Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$, pentru $n \in \mathbb{N}$ impar

- a) X b) I_2 c) 0_2 d) $-X$ e) $-I_2$

Răspuns corect: c) 1p

Problema 4

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, $m, x \in \mathbb{R}$. Aflați mulțimea M a tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care A este inversabilă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

- a) $M = \emptyset$ b) $M = (0, \infty)$ c) $M = (2, \infty)$
- d) $M = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ e) $M = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 5

Fie $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$

- a) $2^n A$ b) $(2^n - 1) A$ c) $(n - 1) A$ d) $(2^{n-1} - 1) A$ e) $n^2 A$

Răspuns corect: d) 1p

Problema 6

Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) $a + b + c$ b) $a^2 + b^2 + c^2$ c) $ab + bc + ac$
 d) $(a + b)(b + c)(a + c)$ e) $-4(b - a)(c - a)(c - b)$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 7

Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$.

- a) 0 b) b c) c d) a e) $(a + b + c)^3$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 8

Să se rezolve ecuația: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ m^2 & -m & x \end{vmatrix} = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- a) $x \in \{1\}$ b) $x \in \{1, 2, 3\}$ c) $x \in \{1, -m, m - 1\}$
 d) $x \in \{2, -m, m - 1\}$ e) $x \in \{1, 2, 4\}$

Răspuns corect: c) 1p

Problema 9

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifică relația $A^3 = pA^2 + qA$ pentru

- a) $p = -2, q = 3$ b) $p = -2, q = 2$ c) $p = 3, q = -2$
 d) $p = -3, q = 2$ e) $p = 1, q = 1$

Răspuns corect: c) 1p

Problema 10

Inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 11

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2})$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) ∞

c) 1

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Răspuns corect: e) 1p

Problema 12

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$

a) 1

b) 2

c) ∞

d) $-\frac{5}{12}$

e) 9

Răspuns corect: d) 1p

Problema 13

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

a) ∞

b) $-\infty$

c) -1

d) $-\frac{1}{4}$

e) 1

Răspuns corect: d) 1p

Problema 14

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin^3 x + 1}{x^2 \cos^2 x + 1}$

a) 0

b) ∞

c) 1

d) 2

e) nu există

Răspuns corect: e) 1p

Problema 15

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2) \arcsin \frac{1}{2x^2 + 1}$

a) 0

b) 1

c) ∞ d) $\frac{1}{2}$

e) 2

Răspuns corect: d) 1p

Problema 16

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x + \cos x)e^{-x^2}$.

a) ∞ b) $-\infty$

c) 0

d) e

e) 1

Răspuns corect: c) 1p

Problema 17

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n$

a) $\frac{1}{2}$

b) 0

c) 1

d) 2

e) ∞

Răspuns corect: a) 1p

Problema 18

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$

a) 0

b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$

d) 1

e) $\frac{4}{3}$

Răspuns corect: c) 1p

Problemele 19 și 20 au în comun următorul enunț:

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Problema 19

Șirul este convergent dacă și numai dacă x_0 aparține mulțimii:

a) $[-1, 1]$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, 1]$ d) $[1, \infty)$ e) $(-1, 1)$

Supliment G.M.

Răspuns corect: c) 1p

Problema 20

Dacă $x_0 = \frac{1}{2}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ este:

a) 1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) nu există

e) ∞

Supliment G.M.

Răspuns corect: 1p