



Olimpiada Națională Gazeta Matematică  
(ONGM) 2020-2021  
Organizator local Upper.School

Etapa I  
Clasa a-XII-a

- Subiecte -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

## §1 Subiecte

### Problema 1

Valoarea numărului  $I = \int_0^2 |x - 1| dx$  este:

- a) 0                      b) -1                      c) 1                      d)  $\frac{1}{2}$                       e) 2

### Problema 2

Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = ax + (bx^2 + c) \cdot \operatorname{arctg} x$  este primitivă a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$

- a)  $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$                       b)  $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$                       c)  $a = b = c = -\frac{1}{2}$   
d)  $a = b = c = \frac{1}{2}$                       e)  $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

### Problema 3

Fie  $F$  primitiva funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \sin x$  cu proprietatea  $F(0) = 0$ . Atunci  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  are valoarea:

- a) 0                      b)  $\frac{\pi}{2}$                       c)  $-\frac{\pi}{2}$                       d) 1                      e) -1

### Problema 4

Fie  $F$  primitiva funcției  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in [0, 1) \end{cases}$ , cu proprietatea

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ . Atunci  $F\left(\frac{1}{2}\right)$  este egal cu:

- a)  $\frac{\pi + 2}{3}$                       b)  $\frac{\pi + \sqrt{3}}{3}$                       c)  $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$                       d)  $\frac{2\sqrt{3} - \pi}{3}$                       e)  $\frac{\sqrt{2} - \pi}{2}$

### Problema 5

Primitivele funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{-2x} + 1}}$ , sunt:

- a)  $\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e$                       b)  $\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) + e$                       c)  $\sqrt{e^{-2x} + 1} + e$   
d)  $(1 + e^x)^2 + e$                       e)  $\operatorname{arctg}(e^x) + e$

**Problema 6**

Să se determine  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, x > 0$

- a)  $\ln \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C$       b)  $\ln \sqrt{1 + x^2} + C$       c)  $-\ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) + C$   
 d)  $\ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C$       e)  $\frac{\ln(1 + x^2)}{x} + C$

**Problema 7**

Fie  $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x+1)}$ , atunci:

- a)  $I = \frac{\pi}{6}$       b)  $I = \frac{\pi}{12}$       c)  $I = \frac{\pi}{18}$       d)  $I = \frac{\pi}{8}$       e)  $I = \frac{\pi}{24}$

**Problema 8**

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  dacă  $m \cdot \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = 1$ .

- a) 4      b)  $\ln 2$       c) 1      d) 2      e)  $\ln \frac{1}{2}$

**Problema 9**

Să se calculeze  $\int_1^9 \frac{[\ln x]}{x} dx$

- a)  $2 \ln 3$       b)  $2 \ln 9 - 1$       c)  $4 \ln 3 - 3$       d)  $2 \ln 3 - 2$       e)  $4 \ln 3 - 2$

**Problema 10**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$ . Să se calculeze  $\int_0^3 f^{-1}(t) dt$ ,  $f^{-1}$  fiind inversa funcției  $f$ .

- a)  $2 \ln 2 - 1$       b)  $3 - \ln 2$       c)  $\frac{5}{2} - \ln 4$       d)  $\frac{3}{2} + \ln 2$       e)  $-\frac{1}{2} + 3 \ln 2$

**Problema 11**

Să se calculeze  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$ .

- a) 0      b) 1      c)  $\frac{2}{3}$       d)  $\frac{1}{3}$       e)  $\frac{1}{4}$

**Problema 12**

Fie  $I = \int_a^b \ln(x+1)dx$ ,  $J = \int_a^b \frac{x}{x+1}dx$  cu  $0 < a < b$ . Care afirmație este adevărată:

- a)  $I = J$       b)  $I > J$       c)  $J > I$       d)  $I = 2J$       e)  $I = \frac{a}{a+b}J$

**Problema 13**

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - i(x+y) - 1 + i$ . Dacă  $m = |e|$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii, atunci:

- a)  $m = 1$       b)  $m = \sqrt{2}$       c)  $m = \sqrt{5}$       d)  $m = 2$       e)  $m = \sqrt{3}$

**Problemele 14 și 15 au în comun următorul enunț:**

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție:  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$

**Problema 14**

Suma elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \circ x < 7\}$  este:

- a) 6      b) 8      c) 10      d) 5      e) -4

**Problema 15**

Suma pătratelor elementelor inversabile în raport cu legea "  $\circ$  " este:

- a) 10      b) 11      c) 12      d) 13      e) 14

**Problema 16**

Fie mulțimea  $G = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$ . Să se determine simetricul elementului  $A(3)$  în raport cu înmulțirea matricelor.

- a)  $A(-3)$       b)  $A(-2)$       c)  $A\left(\frac{1}{3}\right)$       d)  $A(-5)$       e)  $A\left(-\frac{1}{3}\right)$

**Problema 17**

Elementul simetric al unui element  $x$  relativ la legea  $x \circ y = \sqrt[n]{y^{\log_x x}}$ ,  $x, y > 0$ ,  $x, y \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  fixat este:

- a)  $n^{\log_x n}$       b)  $n^{n^2} \log_x n$       c)  $n^{2 \log_x n}$       d)  $n^2 \cdot \log_x n$       e)  $n^{\log_x n}$

**Problemele 18, 19 și 20 au în comun următorul enunț:**

Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legea  $x \circ y = ax + ay - xy$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Problema 18**

Valorile lui  $a$  pentru care legea este asociativă sunt:

- a)  $[0, \infty)$       b)  $\{-1, 0, 1\}$       c)  $\{0, 1\}$       d)  $[0, 1]$       e)  $\{1\}$

**Problema 19**

Valorile lui  $a$  pentru care legea admite element neutru sunt:

- a)  $[-1, 1]$       b)  $\{-1, 0\}$       c)  $\{-1, 1\}$       d)  $\{1\}$       e)  $\{0, 1\}$

**Problema 20**

Valorile lui  $a$  pentru care mulțimea  $H = [0, 1]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea sunt:

- a)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$       b)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$       c)  $[0, 1]$       d)  $[1, \infty)$       e)  $\mathbb{R}$



Olimpiada Națională Gazeta Matematică  
(ONGM) 2020-2021  
Organizator local Upper.School

Etapa I  
Clasa a-XII-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

## §1 Soluții

### Problema 1

Valoarea numărului  $I = \int_0^2 |x - 1| dx$  este:

- a) 0                      b) -1                      c) 1                      d)  $\frac{1}{2}$                       e) 2

Răspuns corect:  c) ..... 1p

### Problema 2

Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = ax + (bx^2 + c) \cdot \operatorname{arctg} x$  este primitivă a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$

- a)  $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$                       b)  $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$                       c)  $a = b = c = -\frac{1}{2}$   
d)  $a = b = c = \frac{1}{2}$                       e)  $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

Răspuns corect:  a) ..... 1p

### Problema 3

Fie  $F$  primitiva funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \sin x$  cu proprietatea  $F(0) = 0$ . Atunci  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  are valoarea:

- a) 0                      b)  $\frac{\pi}{2}$                       c)  $-\frac{\pi}{2}$                       d) 1                      e) -1

Răspuns corect:  d) ..... 1p

### Problema 4

Fie  $F$  primitiva funcției  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in [0, 1) \end{cases}$ , cu proprietatea

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ . Atunci  $F\left(\frac{1}{2}\right)$  este egal cu:

- a)  $\frac{\pi+2}{3}$                       b)  $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$                       c)  $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$                       d)  $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$                       e)  $\frac{\sqrt{2}-\pi}{2}$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 5**

Primitivele funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{-2x} + 1}}$ , sunt:

- a)  $\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e$       b)  $\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) + e$       c)  $\sqrt{e^{-2x} + 1} + e$   
 d)  $(1 + e^x)^2 + e$       e)  $\operatorname{arctg}(e^x) + e$

**Răspuns corect:**  b) ..... 1p

**Problema 6**

Să se determine  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}, x > 0$

- a)  $\ln \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C$       b)  $\ln \sqrt{1 + x^2} + C$       c)  $-\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) + C$   
 d)  $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$       e)  $\frac{\ln(1 + x^2)}{x} + C$

**Răspuns corect:**  c) ..... 1p

**Problema 7**

Fie  $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x + 1)}$ , atunci:

- a)  $I = \frac{\pi}{6}$       b)  $I = \frac{\pi}{12}$       c)  $I = \frac{\pi}{18}$       d)  $I = \frac{\pi}{8}$       e)  $I = \frac{\pi}{24}$

**Răspuns corect:**  a) ..... 1p

**Problema 8**

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  dacă  $m \cdot \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = 1$ .

- a) 4      b)  $\ln 2$       c) 1      d) 2      e)  $\ln \frac{1}{2}$

**Răspuns corect:**  b) ..... 1p

**Problema 9**

Să se calculeze  $\int_1^9 \frac{[\ln x]}{x} dx$

- a)  $2 \ln 3$       b)  $2 \ln 9 - 1$       c)  $4 \ln 3 - 3$       d)  $2 \ln 3 - 2$       e)  $4 \ln 3 - 2$

**Răspuns corect:**  c) ..... 1p



**Problema 10**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$ . Să se calculeze  $\int_0^3 f^{-1}(t)dt$ ,  $f^{-1}$  fiind inversa funcției  $f$ .

Supliment GM

- a)  $2 \ln 2 - 1$       b)  $3 - \ln 2$       c)  $\frac{5}{2} - \ln 4$       d)  $\frac{3}{2} + \ln 2$       e)  $-\frac{1}{2} + 3 \ln 2$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 11**

Să se calculeze  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$ .

- a) 0      b) 1      c)  $\frac{2}{3}$       d)  $\frac{1}{3}$       e)  $\frac{1}{4}$

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 12**

Fie  $I = \int_a^b \ln(x+1)dx$ ,  $J = \int_a^b \frac{x}{x+1} dx$  cu  $0 < a < b$ . Care afirmație este adevărată:

- a)  $I = J$       b)  $I > J$       c)  $J > I$       d)  $I = 2J$       e)  $I = \frac{a}{a+b} J$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problema 13**

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - i(x+y) - 1 + i$ . Dacă  $m = |e|$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii, atunci:

- a)  $m = 1$       b)  $m = \sqrt{2}$       c)  $m = \sqrt{5}$       d)  $m = 2$       e)  $m = \sqrt{3}$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problemele 14 și 15 au în comun următorul enunț:**

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție:  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$

**Problema 14**

Suma elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \circ x < 7\}$  este:

- a) 6      b) 8      c) 10      d) 5      e) -4

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 15**

Suma pătratelor elementelor inversabile în raport cu legea "o" este:

- a) 10                      b) 11                      c) 12                      d) 13                      e) 14

Răspuns corect:  a) ..... 1p

**Problema 16**

Fie mulțimea  $G = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$ . Să se determine simetricul elementului  $A(3)$  în raport cu înmulțirea matricelor.

- a)  $A(-3)$                       b)  $A(-2)$                       c)  $A\left(\frac{1}{3}\right)$                       d)  $A(-5)$                       e)  $A\left(-\frac{1}{3}\right)$

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 17**

Elementul simetric al unui element  $x$  relativ la legea  $x \circ y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$ ,  $x, y > 0$ ,  $x, y \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  fixat este:

- a)  $n^{n \log_x n}$                       b)  $n^{n^2 \log_x n}$                       c)  $n^{2 \log_x n}$                       d)  $n^2 \cdot \log_x n$                       e)  $n^{\log_x n}$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problemele 18, 19 și 20 au în comun următorul enunț:**

Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legea  $x \circ y = ax + ay - xy$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Problema 18**

Valorile lui  $a$  pentru care legea este asociativă sunt:

- a)  $[0, \infty)$                       b)  $\{-1, 0, 1\}$                       c)  $\{0, 1\}$                       d)  $[0, 1]$                       e)  $\{1\}$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 19**

Valorile lui  $a$  pentru care legea admite element neutru sunt:

- a)  $[-1, 1]$                       b)  $\{-1, 0\}$                       c)  $\{-1, 1\}$                       d)  $\{1\}$                       e)  $\{0, 1\}$

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 20**

Valorile lui  $a$  pentru care mulțimea  $H = [0, 1]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea sunt:

a)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

c)  $[0, 1]$

d)  $[1, \infty)$

e)  $\mathbb{R}$

**Răspuns corect:**  a) ..... 1p