ONGM2021 – etapa I Cluj
20.02.2021
CLASA 9

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Rezultatul calculului $\left[\sqrt{2021}\right] + 2021 \cdot \left\{\frac{1}{2021}\right\}$ este :

   A. 42 **B.** 44 **C.** 45 **D.** 43

2. Numărul elementelor mulțimii A=$\left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ este egal cu :

   A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

3. Suma elementelor mulțimii A=$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ este egală cu :

   A. 9 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 6

4. Numărul soluțiilor $(x, y) \in \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$ ale ecuației $2020 \cdot |x - 2020| + 2021 \cdot |y - 2021| = 0$ este :

   A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

5. Dacă vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari, atunci numărul real a este egal cu :

   A. $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** -1

6. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,5), B(-7,-1), C(5,2)$. Câte puncte M de coordonate întregi verifică relația $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 30$?

   A. 4 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 8

7. Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$, iar lungimea înățimii este egală cu 4. Lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ este egală cu :

   A. $8\sqrt{2}$ **B.** 8 **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 10

8. Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere întregi impare. Care din următoarele afirmații este adevărată?

A. ecuația are o rădăcină pară

B. ecuația are o rădăcină impară

C. ecuația are două rădăcini impare

D. ecuația nu are rădăcini întregi

9. Câte soluții întregi are ecuația $\left[\frac{2x+2}{3}\right] = \frac{3x-5}{2}$?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

10. Suma soluțiilor ecuației $\left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{2x+5}{6}\right] = \frac{3x-5}{2}$ este egală cu:

A. 6 **B.** $\frac{15}{2}$ **C.** $\frac{20}{3}$ **D.** $\frac{17}{3}$

11. Se consideră expresia $E(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Valoarea maximă a expresiei este egală cu :

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{9}{5}$

12. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Atunci $min(ab + bc + ca)\ este$:

A. -1 **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{3}{4}$

13. Cel mai mare număr real r pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq r, \forall \text{ a, b, c} \in (0, \infty), \text{ este:}$$

A. 1 **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** 2 **D.** $\frac{3}{2}$

14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$. Atunci S_n este:

A. $\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$ **B.** $\frac{n^2+1}{n^2}$ **C.** $\frac{n+2}{n^2(n+1)^2}$ **D.** $\frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

15. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$, atunci numărul

$\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)}$ este:

A. irațional **B**. rațional **C**. egal cu 1 **D.** mai mic ca 1

16. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ și punctele $M \in$ (AC), $N \in$ (CE) astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Numărul real r pentru care punctele B, M, N sunt coliniare este egal cu :

A. 2 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Pentru problemele 17-18 se consideră următorul enunț:

Fie $ABCD$ un patrulater convex și O punctul de intersecție al diagonalelor. Dacă $AB \cap CD = \{E\}$ și $\frac{AO}{OC} = \frac{1}{3}$, $\frac{BO}{OD} = \frac{1}{2}$, atunci:

17. Exprimat în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$, vectorul $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ este egal cu :

A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ **B.** $\frac{4}{3}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ **C.** $-\frac{3}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ **D.** $\frac{4}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$

18. Exprimat în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{BO}$, vectorul $\overrightarrow{AE}$ este egal cu :

A. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$ **B.** $-8\overrightarrow{AO} + 8\overrightarrow{BO}$ **C.** $\overrightarrow{2AO} - \overrightarrow{3BO}$ **D.** $-3\overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{BO}$

Pentru problemele 19-20 se consideră următorul enunț:

Fie $ABCD$ un patrulater convex și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB și ABC.

19. Dacă $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_3H_1}$, atunci vectorul $\overrightarrow{BD}$ este egal cu :

A. $\overrightarrow{H_1H_3}$ **B.** $\overrightarrow{H_4H_2}$ **C.** $\overrightarrow{2H_3H_1}$ **D.** $\overrightarrow{2H_2H_4}$

20. Dacă $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_4H_2}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este:

A. paralelogram **B.** patrulater inscriptibil

C. patrulater circumscripibil **D.** patrulater ortodiagonal