ONGM2021 – etapa I Cluj

20.02.2021

CLASA 12

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Se dă mulțimea $M=[5,7]$ și legea de compoziție „$*$'' definită prin $x*y=x\cdot y-6\cdot x-6\cdot y+\alpha$. Valoarea parametrului real α pentru care mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport legea de compoziție „$*$'' este :

A. $\alpha=42$ **B.** $\alpha=36$ **C.** $\alpha=-36$ **D.** $\alpha=6$

2. Fie $M=[0,3]$ și legea de compoziție „$*$''definită pe M : $x*y=\dfrac{9\cdot(x+y)}{x\cdot y+9}, \forall x,y\in M$. Aflați k, numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(M,*)$.

A. $k=2$ **B.** $k=1$ **C.** $k=4$ **D.** $k=3$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ o funcție care admite primitive și verifică relațiile : $\cos(f(x))=1, \forall x\in\mathbb{R}$ și $|f(x)-\pi|\le\pi$. Atunci $f(\pi)$ este :

A. 0 **B.** $\dfrac{\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $2\cdot\pi$

4. Mulțimea primitivelor funcției $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x-x^2}}$, este :

A. $\arccos\sqrt{x}+C$ **B.** $\arcsin\sqrt{x}+C$ **C.** $\arccos\dfrac{1}{x}+C$ **D.** $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}+C$

5. Fie $x*y=\dfrac{x+y}{1+x\cdot y}, \forall x,y\in(-1,1)$. Numărul $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\cdots*\dfrac{1}{1000}$ este :

A. $\dfrac{500499}{500502}$ **B.** $\dfrac{500500}{500501}$ **C.** $\dfrac{500499}{500501}$ **D.** $\dfrac{500501}{500502}$

6. Fie $G=(-1,1)$ și legea de compoziție $x\perp y=\dfrac{a\cdot x+b\cdot y}{1+x\cdot y}, \forall x,y\in(-1,1)$.

Notăm $K=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (G,\perp)\text{este grup}\}$ și $S=\sum\limits_{(a,b)\in K}(a+b)$. Atunci valoarea lui S este :

A. $S=3$ **B.** $S=0$ **C.** $S=2$ **D.** $S=6$

7. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții ce admit ca primitive pe F, respectiv G cu proprietățile $f = \frac{1}{2}\cdot(G+g)$, $g = \frac{1}{2}\cdot(F+f)$, $f(0)=0$, $g(0)=2$. Atunci $f(1)+g(1)$ are valoarea:

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** $2\cdot e$

8. Suma soluţiilor sistemului $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{5}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$ este egală cu:

A. $\hat{2}$ **B.** $\hat{3}$ **C.** $\hat{4}$ **D.** $\hat{0}$

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$. Dacă $I = \int_0^{2\cdot\pi} f(x)dx$ atunci I este :

A. 1 **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** 0 **D.** π

10. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $G_a = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & a\cdot t^2 + 2\cdot t \\ 0 & 1 & 4\cdot t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Z} \right\}$ împreună cu înmulțirea matricilor să formeze o structură de grup. Aflați $t \in \mathbb{Z}$ astfel încât suma elementelor lui $(A(t))^{-1}$ să fie egală cu 0.

A. $t=-1$ **B.** $t=3$ **C.** $t=1$ **D.** $t=2$

11. Dacă $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(\cos x)\cdot \sin x \, dx$, atunci I este :

A. $\ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ **B.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$ **C.** $\ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}$ **D.** $\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

12. Pentru fiecare $a > 0$ definim funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ a\cdot x, & x > 0 \end{cases}$. Notăm $M = \{ f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid a \in (0, +\infty) \}$. Atunci :

A. Compunerea functiilor („$\circ$") nu este lege de compozitie pe M.

B. Compunerea functiilor („$\circ$") este lege de compozitie pe M dar nu admite element neutru.

C. $(M, \circ)$ este monoid dar nu este grup

D. $(M, \circ)$ este grup abelian

Problemele **13-14** se referă la următorul enunț :

Fie șirul $(I_n)_{n\ge1}$ dat de $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, n \in \mathbb{N}^*$.

13. Sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este :

A. sir crescator **B.** sir nemarginit **C.** sir convergent **D.** sir divergent

14. Stabiliţi care dintre relaţiile de recurenţă este adevărată:

A. $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+3}\cdot I_n$ **B.** $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\cdot I_n$ **C.** $I_{n+1}=\frac{2n}{2n+3}\cdot I_n$ **D.** $I_{n+1}=\frac{2n+3}{2n+1}\cdot I_n$

15. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție : $x*y=a^x+a^y, a>0$. Fie $H=(0,a)$ și $M=\{a\in(0,+\infty)|H$ este parte stabila a lui $\mathbb{R}$ in raport cu legea de compozitie „$*$”$\}$. Atunci :

A. $M=\varnothing$ **B.** $M=(0,1)$ **C.** $M=(1,+\infty)$ **D.** $M=(0,1)\cup(1,+\infty)$

16. Calculând integrala $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}arctg^2xdx$, obținem:

A. $\mathrm{I}=\frac{\pi^3}{48}$ **B.** $\mathrm{I}=\frac{\pi^3}{96}$ **C.** $\mathrm{I}=-\frac{\pi^3}{96}$ **D.** 0

Problemele **17-18** se referă la următorul enunț :

Se consideră grupul multiplicativ $(U,\cdot)$, unde $U=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|=1\}$. Pentru $a,b\in\mathbb{C}^*$ și $n\in\mathbb{N}^*$ definim mulțimile $A_n(a,b)=\{z\in\mathbb{C}^*\,|\,a\cdot z^n=b\}$.

17. Mulțimea $A_2(1,-1)$ este :

A. $\{1,2\}$ **B.** $\{1,-1\}$ **C.** $\{-i,i\}$ **D.** $\{1\}$

18. Mulțimea punctelor (a,b) pentru care $A_n(a,b)$ este subgrup al grupului $(U,\cdot)$ este :

A. $\{(1,1)\}$ **B.** $\{(-a,a)|\,a\in\mathbb{C}^*\}$ **C.** $\{(a,1)|\,a\in\mathbb{C}\}$ **D.** $\{(a,a)|\,a\in\mathbb{C}^*\}$

19. Valoarea integralei $\int_1^2\frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx$ este :

A. $\ln\frac{1+e^2}{1+e}$ **B.** 1 **C.** $\ln\frac{2+e^2}{2+2e}$ **D.** $\ln(e^2+2e)$

20. Fie $f:[-1,0)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\arcsin x}{x^2}$. Fie $F:[-1,0)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f astfel încât $F(-1)=0$.

Atunci $\lambda=F\left(-\frac{1}{2}\right)$ este :

A. $\lambda=\frac{\pi}{6}+\ln(2-\sqrt{3})$ **B.** $\lambda=-\frac{\pi}{6}+\ln(2+\sqrt{3})$ **C.** $\lambda=\frac{\pi}{3}-\ln(2-\sqrt{3})$ **D.** $\lambda=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cdot\ln(\sqrt{3}-1)$