Filiala Braşov a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a XI-a

Timp de lucru: 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A) = -2, \det(B) = -5$ şi $\det(C) = 7$, atunci $\det(3ABC)$ este egal cu:
A. -630 **B.** 630 **C.** -210 **D.** 210 **E.** alt răspuns

Problemele **2-4** se referă la următorul enunţ:
Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2 = A,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4 **E.** alt răspuns

3. Suma $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2021}$ este egală cu:
A. $\frac{3^{4040}}{8}A$ **B.** $\frac{3^{4040}-1}{8}A$ **C.** $\frac{3^{4042}-1}{8}A$ **D.** $\frac{3^{4042}-1}{4}A$ **E.** alt răspuns

4. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^{2021} = A,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 2021 **E.** alt răspuns

5. Maximul mulţimii

$$A = \left\{ z^2 + t^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{pentru } x, y \in \mathbb{R} \text{ cu } x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

este:
A. 60 **B.** 200 **C.** 180 **D.** 160 **E.** alt răspuns

Problemele **6-7** se referă la următorul enunţ:
Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ pentru care $\det(A^2 - 2021I_2) = 0$.

6. $\det(A)$ este egal cu:
A. 0 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2021}$ **D.** 2021 **E.** alt răspuns

7. Matricea A^2 este egală cu:
A. A **B.** $2021A$ **C.** $2021I_2$ **D.** 2021^2A **E.** $-A$

8. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Care condiţie nu este suficientă pentru ca A^2 să fie egală cu O_2?
A. $A^3 = O_2$ **B.** $A = \text{tr}(A)I_2$ **C.** $\text{tr}(A)A = \det(A)I_2$ **D.** $\text{tr}(A) = -\det(A)$ **E.** $A = O_2$

9. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

este nenul pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este egală cu:
A. $(1, 4)$ **B.** $\mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ **C.** $(2, 3)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus [2, 3]$ **E.** $\emptyset$

10. Mulţimea matricelor inversabile de ordin 3, cu mulţimea elementelor egală cu

$$\{1, 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^3}, 2^{2^4}, 2^{2^5}, 2^{2^6}, 2^{2^7}\},$$

are cardinalul egal cu:

A. 9! **B.** C_9^3 **C.** 8! **D.** 8! – 7! **E.** alt răspuns

11. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu limita egală cu 3. Dacă

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^2},$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n}$$

este egală cu:

A. 0 **B.** 9 **C.** 3 **D.** 10 **E.** alt răspuns

12. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive pentru care

$$\forall n \geq 1 : (n+1)x_{n+1} - nx_n < 0.$$

Cel mai mic număr $M > 0$ pentru care $x_n \geq \dfrac{1}{M}$, $\forall\ n \geq 1$ este:

A. 1 **B.** $\ln(2)$ **C.** e **D.** $\pi/2$ **E.** nu există

13. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

este:

A. 0 **B.** 1/12 **C.** 1 **D.** 1/6 **E.** alt răspuns

14. Valoare limitei

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{(1+3^{k-1})(1+3^k)}$$

este:

A. 9/2 **B.** 9/4 **C.** 3/2 **D.** 3/4 **E.** 3

15. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

este:

A. 0 **B.** ∞ **C.** 5/2 **D.** 5/6 **E.** alt răspuns

Problemele **16-18** se referă la următorul enunţ:

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale definit prin $x_1 = a > 0$ şi relaţia de recurenţă

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right), \ \forall\ n \geq 2.$$

16. Pentru $a = 2$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

A. crescător **B.** descrescător **C.** nu este monoton **D.** constant **E.** nedescrescător

17. Valorile lui a pentru care sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton sunt:

A. $(\sqrt{2}, \infty)$ **B.** $[2, \infty)$ **C.** $(0, 2]$ **D.** $(0, \sqrt{2}]$ **E.** alt răspuns

18. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

A. 2 **B.** 0 **C.** ∞ **D.** 1 **E.** alt răspuns

Problemele **19-20** se referă la următorul enunţ:

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general

$$a_n = n\left(nz + \sqrt{n^2 + nx + y}\right),\ \forall\ n \geq 1,$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

19. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

dacă şi numai dacă:

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$ **E.** $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$

20. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, atunci numărul real u pentru care

$$\lim_{n\to\infty} n^u \ln a_n = -\frac{1}{2}$$

este egal cu:

A. 4 **B.** 1 **C.** 1/2 **D.** $1/\sqrt{e}$ **E.** 2

Filiala Braşov a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a X-a
Soluţii

Timp de lucru: 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

1. A
2. A
3. E
4. B
5. A
6. B
7. C
8. D
9. C
10. D
11. D
12. C
13. B
14. A
15. B
16. A
17. D
18. D
19. B
20. C