

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ  
Etapa I  
Judeţul Braşov, 20 februarie 2021

Clasa a XII-a

Timp de lucru: 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

Problemele 1 - 6 se referă la următorul enunţ:

Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziţie  $x \circ y = 2xy - x - y + 1$ , pentru orice numere reale  $x$  şi  $y$ .

1. Elementul neutru al legii "o" este egal cu

- A. 1      B. 2      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{3}{2}$       E. alt răspuns

2. Simetricul lui 7 în raport cu legea "o" este egal cu

- A. 7      B. 1      C.  $\frac{7}{13}$       D.  $\frac{13}{7}$       E. alt răspuns

3. Numărul  $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{2021}$  este egal cu

- A. 1      B. 0      C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$       E. alt răspuns

4. Numărul perechilor de numere întregi  $(a, b)$  pentru care  $a \circ b = 2021$  este egal cu

- A. 1      B. 2021      C. 0      D. 6      E. alt răspuns

5. Utilizând faptul că funcţia  $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = ax + b$  este izomorfism de între grupurile  $\left( \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \circ \right)$  şi  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ , numărul  $a + b$  este egal cu

- A. 1      B. 0      C. -1      D.  $\frac{1}{2}$       E. alt răspuns

6. Numărul soluţiilor ecuaţiei  $x \circ x = 2021$  este egal cu

- A. 1      B. 2      C. 0      D. 100      E. alt răspuns

**Problemele 7 - 11 se referă la următorul enunț:**

Pentru fiecare număr real  $a$ , se consideră funcțiile  $f; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + ax + 1}{e^x}$ , pentru orice număr real  $x$  și  $g$  o primitivă oarecare a lui  $f$ .

7. Determinați  $a \in \mathbb{R}$  știind că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{3}{e}$

- A. 1      B. 0      C. 3      D. -1      E. alt răspuns

8. Mulțimea valorilor lui  $a$  pentru care funcția  $g$  este strict crescătoare este egală cu

- A.  $(0, 4)$       B.  $(0, 4]$       C.  $[0, 4)$       D.  $[0, 4]$       E. alt răspuns

9. Cel mai mare număr real  $a$  pentru care funcția  $g$  este concavă este egal cu

- A. 1      B.  $\frac{4}{5}$       C. 0      D.  $\frac{5}{4}$       E. alt răspuns

10. Limita șirului  $(I_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , este egală cu

- A. 0      B.  $a$       C.  $2a + 1$       D.  $\frac{2a + 1}{e}$       E. alt răspuns

11. Limita șirului  $(I_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $I_n = n \cdot \int_0^1 x^n f(x) dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , este egală cu

- A. 0      B.  $\frac{1}{e}$       C.  $2a + 1$       D.  $\frac{2a + 1}{e}$       E. alt răspuns

**Problemele 12 - 14 se referă la următorul enunț:**

Se consideră mulțimea  $M = \{0, 1, 2, 3\}$ .

12. Numărul legilor de compoziție definite pe mulțimea  $M$  este egal cu

- A.  $16^{16}$       B.  $4^{16}$       C.  $16^2$       D.  $16^4$       E. alt răspuns

13. Numărul legilor de compoziție care admit element neutru pe 0, definite pe mulțimea  $M$  este egal cu

- A.  $9^4$       B.  $4^{16}$       C.  $4^9$       D. 9      E. alt răspuns

14. Numărul legilor de compoziție comutative definite pe mulțimea  $M$  este egal cu

- A.  $4^{10}$       B.  $4^9$       C.  $16^2$       D.  $2^{10}$       E. alt răspuns

15. Pentru fiecare număr natural  $n \geq 2$ , pe mulțimea  $\mathbb{R}$ , se definește legea  $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ , pentru orice  $x; y \in \mathbb{R}$ . Mulțimea valorilor lui  $n$  pentru care legea ” \* ” admite element neutru, este egală cu

- A.  $\mathbb{N}$       B.  $\{3\}$       C.  $\{2k + 1 | k \in \mathbb{N}^*\}$       D.  $\{2k | k \in \mathbb{N}^*\}$   
E. alt răspuns

**Problemele 16 - 20 se referă la următorul enunț:**

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$  și șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$ , pentru orice număr natural  $n$ .

16. Numărul  $\int_0^2 |f(x)| dx$  este egal cu

- A. 2      B. 1      C.  $\frac{7}{3}$       D.  $\frac{2}{3}$       E. alt răspuns

17. Pentru orice număr natural nenul  $n$  este valabilă relația

- A.  $2nI_n = nI_{n-1}$       B.  $2nI_n = (2n - 1)I_{n-1}$       C.  $(2n + 1)I_n + 2nI_{n-1} = 0$   
D.  $2nI_n + (2n - 1)I_{n-1} = 0$       E. alt răspuns

18. Numărul  $\int_0^1 x \sqrt{-f(x)} dx$  este egal cu

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{3}$       C. 0      D.  $\frac{4}{3}$       E. alt răspuns

19. Numărul  $\int_0^1 \sqrt{-f(x)} dx$  este egal cu

- A.  $\frac{\pi}{3}$       B.  $-\frac{\pi}{4}$       C. 0      D.  $\frac{\pi}{4}$       E. alt răspuns

20. Limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n |f(x)| dx$  este egală cu

- A. 1      B. 0      C.  $-\infty$       D.  $\infty$       E. alt răspuns

Filiala Braşov a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

**Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ**  
**Etapa I**  
**Judeţul Braşov, 20 februarie 2021**

**Clasa a XII-a**  
**Soluţii**

**Timp de lucru: 120 de minute**

**Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.**

1. A
2. C
3. D
4. E
5. A
6. B
7. A
8. D
9. B
10. A
11. D
12. B
13. C
14. A
15. C
16. A
17. C
18. A
19. D
20. D