Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Clasa a X-a

Model subiect

Etapa I / Etapa a II-a

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns.

1. Partea întreagă a numărului $a=\log_2 3+\log_3 8$ este egală cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

2. Partea întreagă a numărului $b=\sqrt[3]{81}$ este egală cu:

A. 3 **B. 4** **C.** 5 **D.** 7 **E.** 9

3. Dacă $F(t)=t^3-6t^2+12t$ și $u=2+\sqrt[3]{2}$, atunci numărul $F(u)$ este egal cu:

A. $\sqrt[3]{4}$ **B.** 4 **C.** $2\cdot\sqrt[3]{2}$ **D.** 8 **E.** 10

4. Numărul numerelor raționale din mulțimea $A=\left\{\left(\sqrt[3]{5}\right)^{20-k}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^k \,\middle|\, k\in\{1,2,3,...,19,20\}\right\}$ este egal cu:

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 13 **E.** 17

5. Pentru $r>0$ se consideră mulțimile $M=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|=1 \wedge |z-3i|=r\right\}$ și $A=\left\{r>0\,\middle|\,\mathrm{card}M=1\right\}$.
Suma elementelor mulțimii A este egală cu:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

6. Fie $u,v\in\mathbb{C}$, cu $|u|=|v|=1$, astfel încât $|1+u\cdot\bar{v}|=\sqrt{3}$. Modulul numărului complex $u-v$ este egal cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$ **E.** 3

7. Dacă $a,b>0, a^2+b^2=11\cdot ab$ și $\frac{\lg a+\lg b}{2}=\lg\frac{a+b}{p}$, atunci numărul p este egal cu:

A. 3 **B.** 7 **C.** $\sqrt{7}$ **D.** $\sqrt{11}$ **E.** $\sqrt{13}$

8. Dacă $a=\log_{14}21$ și $b=\log_{14}6$, atunci numărul $x=\log_{14}42$ este egal cu:

A. $\frac{a+b}{2}$ **B.** $\frac{a+b+1}{2}$ **C.** $\frac{a+b-1}{2}$ **D.** $\frac{a+b+3}{2}$ **E.** $\frac{a+b-2}{2}$

9. Fie α și β soluțiile ecuației $x^2-x+1=0$. Numărul $t=(\alpha-1)^{2021}+(\beta-1)^{2021}$ este egal cu:

A. 1 **B.** -1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $i\sqrt{3}$ **E.** $2i$

10. Numerele $a,b,c\in\mathbb{C}^*$ verifică relațiile $a+b+c=0$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Numărul real t pentru care este adevărată egalitatea $a^6+b^6+c^6=t\cdot a^2b^2c^2$ este egal cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 6

11. Suma inverselor soluțiilor ecuației $z^3-i\cdot z^2-z+i=0$ este egală cu:

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** $-i$ **E.** i

12. Vârfurile unui triunghi ABC au afixele $a=i$, $b=1+3i$ și $c=2-i$. Afixul centrului de greutate al triunghiului este numărul complex:

A. $g=\frac{3+3i}{2}$ **B.** $g=\frac{3+3i}{4}$ **C.** $g=\frac{3+3i}{3}$ **D.** $g=\frac{4+2i}{2}$ **E.** $g=\frac{4+8i}{4}$

13. Imaginile geometrice ale numerelor complexe $a=-2, b=1+3i, c=2+k\cdot i$ sunt punctele A, B, respectiv C. Numărul real k pentru care $AB\perp BC$ este egal cu:

A. $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3 **E.** $\frac{7}{2}$

14. Pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, se consideră mulțimea $U_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\}$. Numărul elementelor mulțimii $M=U_8\cap U_{12}$ este egal cu:

A. 4 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 1 **E.** 3

15. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(t)=3t-1$, $g(u)=\left[\frac{u+1}{3}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:

A f este injectivă, g este surjectivă
B f este surjectivă, g este surjectivă
C f nu este injectivă, g este injectivă
D f nu este surjectivă, g nu este surjectivă
E f este injectivă, g este injectivă

16. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+2, & x<2 \\ 2^x, & x\geq 2\end{cases}$ este bijectivă, deci inversabilă, inversa ei fiind funcția g. Numărul $A=g(0)+g(8)$ este egal cu:

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2 **E.** 3

17. Suma elementelor mulțimii $M=\{x\in\mathbb{R}\mid\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-x}=1\}$ este egală cu:

A. 1 **B.** $\frac{5}{18}$ **C.** $\frac{5}{9}$ **D.** $\frac{11}{9}$ **E.** $\frac{14}{9}$

18. Suma elementelor mulțimii $P=\{x\in\mathbb{R}\mid 16+4^x=5\cdot 2^{x+1}\}$ este egală cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 D. **4** **E.** 5

19. Dacă $x,y\in(0,+\infty)$ și $xy=40$, $x^{\lg y}=4$, atunci numărul $s=x+y$ este egal cu:

A. 10 **B.** 14 **C.** 20 **D.** 36 **E.** 44

20. Dacă $x\in[0,2\pi)$, atunci numărul soluțiilor ecuației $\sin 4x+3\cdot\sin 2x=0$ este egal cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

21. Numărul numerelor întregi n pentru care $1+\log_2(n+1)=n+\cos\frac{n\pi}{6}$ este egal cu:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

22. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, atunci, folosind notațiile uzuale, suma $b+c$ este egală cu:

A. $r+R$ **B.** $\frac{r+R}{2}$ **C.** $2(r+R)$ **D.** $\frac{r+R}{r\cdot R}$ **E.** $a+r+R$

23. Într-un triunghi ABC se știe că $AB=4$, $BC=5$, $CA=6$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:

A. $B=3C$ **B.** $A=2C$ **C.** $A=3C$ **D.** $C=2B$ **E.** $B=2C$

24. Dacă H este ortocentrul unui triunghi ABC, atunci lungimea segmentului (AH) este egală cu:

A. $R\sin A$ **B.** $2R\sin A$ **C.** $R\cos A$ **D.** $2R\cos A$ **E.** $2r\sin A$