Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Clasa a XII-a

Model subiect

Etapa I

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns.

1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $(x,y)\to x\circ y \stackrel{def}{=\!=} \frac{1}{3}(x+y-xy+2)$. Care dintre următoarele mulțimi $A\subset\mathbb{R}$ are proprietatea că legea „$\circ$" determină o structură de grup pe $\mathbb{R}\setminus A$?

A. $\varnothing$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{-1\}$ **D.** $\{3\}$

2. Numărul legilor de compoziție $*:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ cu proprietatea că $(a*b)*c=a+b+c$, $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}_n$, este:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $1+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]$

3. Valorile constantelor $a,b\in\mathbb{R}$, pentru care operația

$$x*y=a(x^2+y^2)+2xy+2(b^2-3)x+2y+b-1,\forall x,y\in\mathbb{R},$$

definește pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ o structură de grup comutativ, sunt:

A. $a=0$, $b=1$ **B.** $a=0$, $b=2$ **C.** $a=1$, $b=2$ **D.** $a=2$, $b=2$

4. În grupul $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ordinul elementului $z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ este egal cu:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

5. Ordinul elementului $a=15$ în grupul $(\mathbb{Z}_{100},+)$ este egal cu:

A. 20 **B.** 25 **C.** 40 **D.** 15

6. Numărul morfismelor de la grupul $(\mathbb{Z}_3,+)$ la grupul $(\mathbb{Z}_6,+)$ este egal cu:

A. 0 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

7. O mulțime M pe care **nu** se poate defini o lege de compoziție „$*$" astfel încât $(M,*)$ să fie un grup ciclic este:

A. $M=\mathbb{N}$ **B.** $M=\mathbb{Z}$ **C.** $M=\mathbb{Q}$ **D.** $M=\mathbb{R}$

8. Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu elementul neutru 1, iar $a,b\in G\setminus\{1\}$, astfel încât $a^3b^4=1$ și $a^{10}b^9=1$. Notăm $m=\text{ord}(a)$, $n=\text{ord}(b)$ (ordinele elementelor a, respectiv b, în grupul G). Atunci:

A. $m\cdot n=30$ **B.** $m+n=26$ **C.** $m+n=24$ **D.** $m\cdot n=24$

9. Fie $f:(G_1,\cdot)\to(G_2,\cdot)$ un morfism de grupuri și e_1, e_2 elementele neutre ale grupurilor G_1, respectiv G_2. Notăm cu $\text{Ker}f=\{x\in G_1 \mid f(x)=e_2\}$. Funcția *f* este injectivă dacă și numai dacă:

A. $\text{Ker}f=\{e_2\}$ **B.** $\text{Ker}f=\{e_1\}$ **C.** $\text{Ker}f=G$ **D.** $\text{Ker}f=G\setminus\{e_1\}$

10. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit abelian de ordin 2021, care are exact 2021 endomorfisme. Care dintre următoarele afirmații este **falsă**?

A. $(G,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_{2021},+)$ **B.** G conține cel puțin un element de ordin 2021
C. G conține 1932 de elemente de ordin 2021 **D.** G conține 2020 de elemente de ordin 2021

11. Fie $F\in\int\frac{dx}{x(x^3+1)}$, $x\in(0,\infty)$, astfel încât $F(1)=\ln\left(\sqrt[3]{4}\right)$. Numărul real $F(e)$ este egal cu:

A. $\ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{1+e^3}}\right)$ **B.** $\ln\left(\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right)$ **C.** $\ln(2e)$ **D.** $\ln(3e^2)$

12. Fie F o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6-x^5+2x^4+x^2-x+2$. Stabiliți care dintre următoarele relații este adevărată:

A. $F\left(\sqrt[3]{3}\right)<F\left(\sqrt[3]{2}\right)$ **B.** $F(e)>F(\pi)$ **C.** $F(2020)<F(2021)$ **D.** $F(\ln 3)>F(\ln 5)$

13. Funcția nenulă $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, cu $f(0)=0$, este derivabilă și are proprietatea că $f^3\in\int f(x)dx$. Atunci:

A. $f(x)=\sqrt{x}$ **B.** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}$, **C.** $f(x)=\sqrt{\frac{2}{3}x}$ **D.** $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

14. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă cu $f(0)=0$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a sa cu proprietatea că $F(x)+f(x)=\sin(x), \forall x\in\mathbb{R}$, atunci numărul $f(\pi)$ este:

A. -1 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

15. Numărul întreg *n* pentru care are loc relația $\int_1^e (x^3+1)\ln x\,dx=\frac{1+4n+3e^n}{4n}$ este egal cu:

A. -2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 6

16. Fie numerele reale $b>a>1$ astfel încât $\int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(\frac{b-1}{a-1}\right)$. Dacă $a+b=7$, atunci $a\cdot b$ este egal cu:

A. 10 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 6

Problemele **17-18** se referă la următorul enunț:

Considerăm $\alpha\in\mathbb{R}$ și funcția $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f_\alpha(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } x\neq 0\\ \alpha, & \text{dacă } x=0\end{cases}$.

17. Funcția f_α are proprietatea valorilor intermediare (proprietatea lui Darboux) dacă și numai dacă:

A. $\alpha=0$ **B.** $\alpha\in\{-1,0,1\}$ **C.** $\alpha\in(-1,1)$ **D.** $\alpha\in[-1,1]$

18. Funcția f_α admite primitive dacă și numai dacă:

A. $\alpha=0$ **B.** $\alpha\in\{-1,0,1\}$ **C.** $\alpha\in(-1,1)$ **D.** $\alpha\in[-1,1]$

Problemele **19-20** se referă la următorul enunț:

Fie $(F_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții cu proprietățile:

a) pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, funcția F_n este o primitivă a funcției $f_n:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\mathrm{tg}^n\, x$;

b) șirul de termen general $a_n=F_n(0)$, $n\in\mathbb{N}$, este constant.

19. Dacă $F_0\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$, atunci $F_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$ este egal cu:

A. $\frac{\pi}{6}-\ln 2$ **B.** $\frac{\pi}{6}+\ln 2$ **C.** $\frac{\pi}{4}-\ln 2$ **D.** $\frac{\pi}{3}+\ln 2$

20. Stabiliți care dintre următoarele egalități este adevărată:

A. $F_4\left(\frac{\pi}{6}\right)+F_2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{27}$ **B.** $F_4\left(\frac{\pi}{3}\right)+F_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F_4\left(\frac{\pi}{4}\right)+F_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$ **D.** $F_4\left(\frac{\pi}{4}\right)+F_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$