Olimpiada de Matematică
faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Problema 1. Fie a, b, c trei numere naturale care împărţite pe rând la 2009 dau resturile 1935, 700 şi 800. Să se determine restul împărţirii numărului $a+3\cdot b+5\cdot c$ la 2009.

Marcel Manea, profesor, Galaţi

Problema 2. Să se demonstreze că fracţia $\dfrac{8^n+2^n-\left(3^n+7^n\right)}{9^n-4^n}$ se poate simplifica printr-un număr natural diferit de zero şi de 1, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Milu Cîrmaciu, profesor, Galaţi

Problema 3. Să se determine numerele de forma $\overline{abcd}$, $a\neq 0$, ştiind că aceste numere verifică egalitatea: $3+6+9+...+\overline{abcd}=\overline{abcd000}$.

Ionel Patriche, profesor, Galaţi

Problema 4. Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât numărul zerourilor cu care se termină numărul $\left(n+10\right)!$ să fie cu 2009 mai mare decât numărul zerourilor cu care se termină numărul $n!$(unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$).

Vasile Popa, profesor, Galaţi

<u>**Notă**</u>

1. Toate problemele sunt obligatorii
2. Timp efectiv de lucru 3 ore
3. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică
faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Problema 1. Numărul natural n dă restul 3 la împărţirea prin 5 şi restul 2 la împărţirea prin 7. Ce rest se obţine la împărţirea lui n prin 35?

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie unghiul $\measuredangle AOB$ cu măsura de 91^0 şi n puncte distincte $M_1, M_2, ..., M_n$, $n \in N^*$ aflate în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, astfel încât:
$\measuredangle AOM_1 \equiv \measuredangle M_1OM_2 \equiv ... \equiv \measuredangle M_nOB$.
Dacă unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$ sunt adiacente suplementare, se cere:
a) Să se determine cel mai mare număr natural n , unde $m(\measuredangle AOM_1) = x^0,\ x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
b) Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$
c) Dacă numărul natural n este determinat la punctul (a), punctul C se află în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar p si q sunt numere prime, unde $p^0 = m(\measuredangle AOC)$ si $q^0 = \mathrm{m}(\measuredangle BOC),\ p > q$, să se demonstreze că nu există o semidreaptă $[OM_i,\ i \in \{1,2,3,...,n\}$, care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p \in \{1,2,3,...,n\}$.

Milu Cîrmaciu, profesor, Galaţi

Problema 3. Să se determine câte numere naturale de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ au proprietatea că numărul 4 divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$, unde $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 4. Să se determine restul împărţirii numărului $a = \underbrace{\overline{200920092009...2009}}_{2008 cifre}$ prin 21.

Dumitru şi Rodica Balan, profesori, Galaţi

<u>**Notă**</u>

1. Toate problemele sunt obligatorii
2. Timp efectiv de lucru 3 ore
3. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Problema 1. Fie a, b, c trei numere naturale care împărţite pe rând la 2009 dau resturile 1935, 700 şi 800. Să se determine restul împărţirii numărului $a+3\cdot b+5\cdot c$ la 2009.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie:
$a=2009\cdot c_1+1935,\ b=2009\cdot c_2+700,\ c=2009\cdot c_3+800.$
Atunci
$a+3\cdot b+5\cdot c=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+(1935+2100+4000)=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+8035=$
$=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+2009\cdot 3+2008=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3+3)+2008.$
Aşadar, restul împărţirii este **2008.**

Problema 2. Să se demonstreze că fracţia $\dfrac{8^n+2^n-(3^n+7^n)}{9^n-4^n}$ se poate simplifica printr-un număr natural diferit de zero şi de 1, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Cîrmaciu Milu, profesor, Galaţi

Soluţie:
Se calculează ultima cifră (notată cu u.c.) a numerelor: 8^n ,2^n, 3^n,7^n.

$$\begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k})=6 \\ u.c.(2^{4\cdot k})=6 \\ u.c.(3^{4\cdot k})=1 \\ u.c.(7^{4\cdot k})=1 \end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+1})=8 \\ u.c.(2^{4\cdot k+1})=2 \\ u.c.(3^{4\cdot k+1})=3 \\ u.c.(7^{4\cdot k+1})=7 \end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+2})=4 \\ u.c.(2^{4\cdot k+2})=4 \\ u.c.(3^{4\cdot k+2})=9 \\ u.c.(7^{4\cdot k+2})=9 \end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+3})=2 \\ u.c.(2^{4\cdot k+3})=8 \\ u.c.(3^{4\cdot k+3})=7 \\ u.c.(7^{4\cdot k+3})=3 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } k\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow$ în toate cele 4 cazuri: u.c.$\left(8^n+2^n-(3^n+7^n)\right)=0\Rightarrow$ numărătorul se divide cu 10

$$\begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k})=1 \\ u.c.(4^{2\cdot k})=6 \end{cases};\begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k+1})=9 \\ u.c.(4^{2\cdot k+1})=4 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } k\in\mathbb{N}^*$$

In cele doua cazuri, u.c.(9^n-4^n) este 5 $\Rightarrow$ numitorul se divide cu 5.
Aşadar, fracţia se simplifică prin 5.

Problema 3. Să se determine numerele de forma $\overline{abcd},\ a \neq 0$, ştiind că acest număr verifică egalitatea: $3+6+9+...+\overline{abcd} = \overline{abcd000}.$

Patriche Ionel, profesor, Galaţi

Soluţie:

Se observă că numărul $\overline{abcd} = 3\cdot x,\ x\in \mathbb{N}^*$. Egalitatea dată devine:

$3+6+9+...+3\cdot x = 3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow 3\cdot(1+2+3+...+x) = 3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow$

$1+2+3+...+x = x\cdot 1000 \Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x+1)}{2} = 1000\cdot x \Leftrightarrow x\cdot(x+1) = 2000\cdot x.$

Dar $x\neq 0$.Atunci x+1=2000 $\Leftrightarrow$ x=1999.

Deci $\overline{abcd} = 3\cdot 1999 = 5997.$

Problema 4. Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât numărul zerourilor cu care se termină numărul $(n+10)!$ să fie cu 2009 mai mare decât numărul zerourilor cu care se termină numărul $n!$.(unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n$).

Popa Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie:

O condiţie pentru a satisface cerinţa problemei este ca 10^{2009} să dividă numărul $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$. Rezulta ca 5^{2009} divide $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$.

Deoarece printre numerele $n+1,\ n+2,\ ...,\ n+10$, exact două numere sunt multipli de 5, atunci unul se divide doar cu 5, iar celălalt obligatoriu se divide cu 5^{2008}.Rezultă că $n+10 \geq 5^{2008} \Rightarrow n \geq 5^{2008}-10$.

Arătăm că $n_0 = 5^{2008}-10$ este numărul căutat.

Fie $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n_0$. Arătăm că numărul A este de forma $A = B\cdot 10^p\cdot 2^{2009}$, p$\in \mathbb{N}^*$, iar B este număr natural cu ultima cifră diferită de zero.

Analizăm modul de obţinere a zerourilor cu care se termină numărul A.

Considerăm toate numerele mai mici decât n_0, care se divid cu 5, acestea sunt de forma $2^k\cdot 10^t\cdot u,\ t\geq 1,\ k\in\mathbb{N}$, u nu se divide cu 2 şi 5, sau de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v,\ l\geq 1,\ s\in\mathbb{N}$, v nu se divide cu 2 şi 5. Pentru un număr de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, asociem numărul de forma $2^l\cdot 10^s\cdot v$. Produsul acestora se termină în $l+s$ zerouri.

Observăm că 2^{2009} figurează ca factor în numărul A şi nu a fost considerat anterior. Forma lui A este justificată, iar numărul $A\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)\cdot...\cdot(n_0+10)$ se termină cu 2009 zerouri mai mult decât numărul A.

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Problema 1. Numărul natural n dă restul 3 la împărţirea prin 5 şi restul 2 la împărţirea prin 7. Ce rest se obţine la împărţirea lui n prin 35?

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Soluţie :

Din ipoteză, există $a,b\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $n=5\cdot a+3=7\cdot b+2$.

Din teorema împărţirii cu rest, $a=7\cdot c+r,\ c,r\in\mathbb{N},\ r\in\{0,1,2,...,6\}$.

Atunci, $5\cdot(7\cdot c+r)+3=7\cdot b+2\Leftrightarrow 7\cdot(b-5\cdot c)=5\cdot r+1\Rightarrow 7/5\cdot r+1$.

Dar $r\in\{0,1,2,...,6\}$.Se obţine că r=4 verifică relaţia.

Atunci, a=7 $\cdot$ c+4 $\Rightarrow$ n=35 $\cdot$ c+23. Aşadar, restul împărţirii lui n la 35 este 23.

Problema 2. Fie unghiul $\measuredangle AOB$ cu măsura de 91^0 şi $M_1,M_2,...,M_n$, $n\in N^*$ puncte distincte aflate în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, astfel încât:

$\measuredangle AOM_1\equiv\measuredangle M_1OM_2\equiv...\equiv\measuredangle M_nOB$.

Dacă unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$ sunt adiacente suplementare, se cere:

a) Să se determine cel mai mare număr natural n, unde $m(\measuredangle AOM_1)=x^0,\ x\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

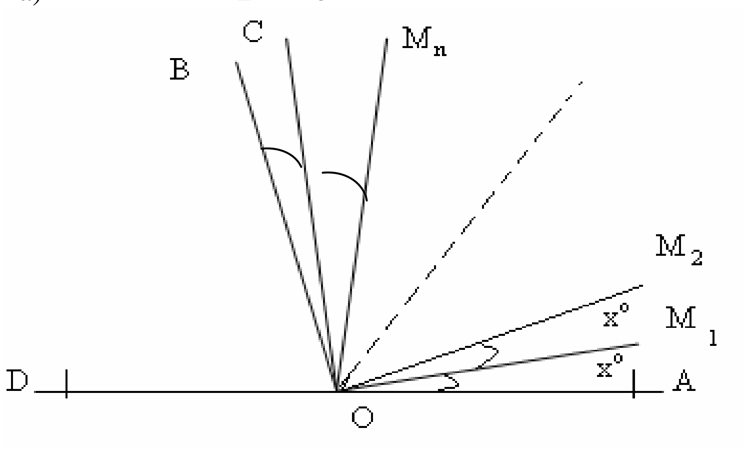
b) Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$

c) Dacă numărul natural n este determinat la punctul (a), punctul C se află în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar p si q sunt numere prime, unde $p^0=m(\measuredangle AOC)$ si q^0=m$(\measuredangle BOC)$, $p>q$, să se demonstreze că nu există o semidreaptă $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$, care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p\in\{1,2,3,...,n\}$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Soluţie :

a) **2^0** **5^0**



$$\left.\begin{array}{l}(n+1)\cdot x^0 = 91^0\\ \text{dar } n\in\mathbb{N},\ n\geq 1 \text{ şi ia valore maximă}\\ x\in N,\ x\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} n+1=13\Rightarrow n=12\\ x=7^0\in\mathbb{N}\end{cases}$$

b) Cum unghiurile $\measuredangle(AOB)$ şi $\measuredangle(BOD)$ sunt adiacente suplementare, bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 90^0 .

c).

$$\left.\begin{array}{l} m(\measuredangle COB)+m(COA)=91^0\\ m(\measuredangle \mathrm{COB})=q^0\\ m(\measuredangle \mathrm{COA})=p^0\\ p>q,\ p,q \text{ numere prime}\end{array}\right\}\Rightarrow m(\measuredangle COB)=2^0;\ \mathrm{m}(\measuredangle \mathrm{COA})=89^0 \text{(de demonstrat unicitatea)}$$

Rezultă că $m(\measuredangle COM_n)=5^0$

Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd.

Presupunem că există $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$, bisectoare a unghiului $\measuredangle(COM_p)$, unde p$\in$ {1,2,...,12}.

Notăm cu y numărul de unghiuri adiacente cu măsura de 7^0 .

Avem: $\dfrac{5+y\cdot 7}{2}=7\cdot k,\ \mathrm{k}\in\mathbf{N}^*\Rightarrow$ y = $\dfrac{14\cdot k-5}{7}=2\cdot k-\dfrac{5}{7}\notin\mathbf{N}^*$, pentru orice k$\in\mathbb{N}^*$. Contradicţie.

Rezultă că presupunerea este falsă, de unde rezultă că nu există o semidreaptă $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$ care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p\in\{1,2,3,...,n\}$.

Problema 3. Să se determine câte numere naturale de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ au proprietatea că numărul 4 divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$, unde $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$.

Popa Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie :

Observăm că în total sunt 1000 numere de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, cu $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$

Metoda I

Sunt posibile următoarele cazuri:

I. Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare. Fie a număr par iar b, c numere impare. Atunci a+2 este număr par şi 4 divide a +2. Rezultă că

$a \in \{2,6\}$, $b,c \in \{1,3,5,7,9\}$.

Deci sunt $2\cdot 25 = 50$ de numere. În total $3\cdot 50 = 150$ numere.

II. Două numere sunt pare şi unul impar. Fie a,b numere pare şi c număr impar

$. \Rightarrow a,b \in \{0,2,4,6,8\}, c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 125$ numere. .

Total: $3\cdot 125 = 375$ numere.

III. Toate numerele sunt pare $\Rightarrow 5\cdot 25 = 125$ numere.

Rezultat=150+375+125=**650 numere**.

Metoda II.

Numărăm tripletele (a,b,c) pentru care 4 nu divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$

Cazul I. Toate numerele impare $\Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 125$ numere;

Cazul II.Un număr par din mulţimea $\{0,4,8\}$ şi celelalte numere impare $\Rightarrow 3\cdot(3\cdot 5\cdot 5) = 225$ numere.

Total numere 125 + 225=350numere.

Aşadar, 1000-350=**650** numere –soluţia problemei.

Problema 4. Să se determine restul împărţirii numărului $a = \underbrace{\overline{200920092009...2009}}_{2008 cifre}$ prin 21.

Dumitru şi Rodica Balan, profesori, Galaţi

Soluţie:

$a = 2009\cdot 10^{2004} + 2009\cdot 10^{2000} + ... + 2009\cdot 10^4 + 2009 =$

$= 2009\cdot(9+1)^{2004} + 2009\cdot(9+1)^{2000} + ... + 2009\cdot(9+1)^4 + 2009 =$

$2009\cdot(M_9+1) + 2009\cdot(M_9+1) + ... + 2009\cdot(M_9+1) + 2009 =$

$$2009\cdot(M_9+M_9+...+M_9) + \left(\underbrace{2009+2009+...+2009}_{502 ori}\right) = 2009\cdot M_9 + 2009\cdot 502$$

$= 287\cdot 7\cdot M_9 + 48024\cdot 21 + 14 = 287\cdot M_{21} + M_{21} + 14 = M_{21} + 14$

(S-a notat cu M_k multiplul numărului k, $k \in \mathbb{N}^*$).

Aşadar, restul împărţirii numărului **a** prin 21 este **14.**

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$a=2009\cdot c_1+1935,\ b=2009\cdot c_2+700,\ c=2009\cdot c_3+800.$	**3p**
	$a+3\cdot b+5\cdot c=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+(1935+2100+4000)=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+8035=$ $=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+2009\cdot 3+2008=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3+3)+2008.$	**3p**
	Restul împărţirii este 2008	**1p**
2.	$\begin{cases}u.c.(8^{4\cdot k})=6\\u.c.(2^{4\cdot k})=6\\u.c.(3^{4\cdot k})=1\\u.c.(7^{4\cdot k})=1\end{cases};\begin{cases}u.c.(8^{4\cdot k+1})=8\\u.c.(2^{4\cdot k+1})=2\\u.c.(3^{4\cdot k+1})=3\\u.c.(7^{4\cdot k+1})=7\end{cases};\begin{cases}u.c.(8^{4\cdot k+2})=4\\u.c.(2^{4\cdot k+2})=4\\u.c.(3^{4\cdot k+2})=9\\u.c.(7^{4\cdot k+2})=9\end{cases};\begin{cases}u.c.(8^{4\cdot k+3})=2\\u.c.(2^{4\cdot k+3})=8\\u.c.(3^{4\cdot k+3})=7\\u.c.(7^{4\cdot k+3})=3\end{cases},\ k\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ în toate cele 4 cazuri: u.c.$\left(8^n+2^n-\left(3^n+7^n\right)\right)$ este 0 $\Rightarrow$ numărătorul se divide cu 10	**3p**
	$\begin{cases}u.c.(9^{2\cdot k})=1\\u.c.(4^{2\cdot k})=6\end{cases};\begin{cases}u.c.(9^{2\cdot k+1})=9\\u.c.(4^{2\cdot k+1})=4\end{cases},\ k\in\mathbb{N}^*$ In cele doua cazuri, u.c.$\left(9^n-4^n\right)$ este 5 $\Rightarrow$ numitorul se divide cu 5 .	**2p**
	Aşadar, fracţia se simplifică prin 5.	**2p**
3	Se observă că numărul $\overline{abcd}=3\cdot x,\ x\in\mathbb{N}^*$.	**1p**
	Egalitatea dată devine: $3+6+9+...+3\cdot x=3\cdot x\cdot 1000\Leftrightarrow 3\cdot(1+2+3+...+x)=3\cdot x\cdot 1000\Leftrightarrow$ $1+2+3+...+x=x\cdot 1000\Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x+1)}{2}=1000\cdot x\Leftrightarrow x\cdot(x+1)=2000\cdot x.$	**3p**
	Dar $x\neq 0$.Atunci x+1=2000 $\Leftrightarrow$ x=1999. Deci $\overline{abcd}=3\cdot 1999=5997$.	**3p**
4	O condiţie pentru a satisface cerinţa problemei este ca 10^{2009} să dividă	**2p**

	produsul de factori $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$. Rezulta ca 5^{2009} divide $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$.	
	Deoarece printre numerele $n+1,\ n+2,\ ...,\ n+10$, exact două numere sunt multipli de 5, atunci unul se divide doar cu 5, iar celălalt obligatoriu se divide cu 5^{2008}	**2p**
	Rezultă că $n+10 \ge 5^{2008} \Rightarrow n \ge 5^{2008}-10$.	**1p**
	Arătăm că $n_0 = 5^{2008}-10$ este numărul căutat. Fie $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n_0$. Arătăm că numărul A este de forma $A = B\cdot 10^p \cdot 2^{2009}$, $p\in\mathbb{N}^*$, iar B este număr natural cu ultima cifră diferită de zero. Analizăm modul de obţinere a zerourilor cu care se termină numărul A. Considerăm toate numerele mai mici decât n_0, care se divid cu 5, acestea sunt de forma $2^k\cdot 10^t\cdot u$, $t\ge 1$, $k\in\mathbb{N}$, u nu se divide cu 2 şi 5, sau de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, $l\ge 1$, $s\in\mathbb{N}$, v nu se divide cu 2 şi 5. Pentru un număr de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, asociem numărul de forma $2^l\cdot 10^s\cdot v$. Produsul acestora se termină în $l+s$ zerouri. Observăm că 2^{2009} figurează ca factor în numărul A şi nu a fost considerat anterior. Forma lui A este justificată, iar numărul $A\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)\cdot...\cdot(n_0+10)$ se termină cu 2009 zerouri mai mult decât numărul A.	**2p**

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Din ipoteză, există $a,b\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $n=5\cdot a+3=7\cdot b+2.$	**1p**
	Din teorema împărţirii cu rest, $a=7\cdot c+r,\ c,r\in\mathbb{N},\ r\in\{0,1,2,...,6\}$	**2p**
	Atunci, $5\cdot(7\cdot c+r)+3=7\cdot b+2\Leftrightarrow 7\cdot(b-5\cdot c)=5\cdot r+1\Rightarrow 7/5\cdot r+1.$	**2p**
	Atunci, a=7 $\cdot$ c+4 $\Rightarrow$ n=35 $\cdot$ c+23. Aşadar, restul împărţirii lui n la 35 este 23	**2p**
2.	Figura corect construită	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{n}+1)\cdot x^0=91^0\\ \text{dar } \mathrm{n}\in\mathbb{N},\ \mathrm{n}\geq 1 \text{ şi are valore maximă}\\ \mathrm{x}\in\mathrm{N},\ \mathrm{x}\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}n+1=13\Rightarrow n=12\\ x=7^0\in\mathbb{N}\end{cases}$	**2p**
	b) Cum unghiurile $\measuredangle(AOB)$ şi $\measuredangle(BOD)$ sunt adiacente suplementare, bisecto formează un unghi cu măsura de 90^0	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}m(\measuredangle COB)+m(COA)=91^0\\ m(\measuredangle \mathrm{COB})=q^0\\ m(\measuredangle \mathrm{COA})=p^0\\ p>q,\ p,q \textit{ numere prime}\end{array}\right\}\Rightarrow m(\measuredangle COB)=2^0;\ \mathrm{m}(\measuredangle\mathrm{COA})=89^0$(de demonstrat unicitatea)	**1p**
	Rezultă că $m(\measuredangle COM_n)=5^0$ Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$, bisectoare a unghiului $\measuredangle(COM_p)$, unde p$\in$ {1,2,...,12}. Notăm cu y numărul de unghiuri adiacente cu măsura de 7^0 . Avem: $\frac{5+y\cdot 7}{2}=7\cdot k,\ \mathrm{k}\in\mathbf{N}^*\Rightarrow\ \mathrm{y}=\frac{14\cdot k-5}{7}=2\cdot k-\frac{5}{7}\notin\mathbf{N}^*$, pentru orice k$\in\mathbb{N}^*$. Contradicţie. Rezultă că presupunerea este falsă, de unde rezultă că nu	**2p**

	există o semidreaptă $[OM_i$, $i \in \{1,2,3,...,n\}$ care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p)$, $p \in \{1,2,3,...,n\}$.	
3	Observăm că în total sunt 1000 numere de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, cu $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$	**1p**
	Sunt posibile următoarele cazuri: I. Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare. Fie a număr par iar b, c numere impare. Atunci a+2 este număr par şi 4 divide a +2 . Rezultă că $a \in \{2,6\}$, $b,c \in \{1,3,5,7,9\}$. Deci sunt $2 \cdot 25 = 50$ de numere. În total $3 \cdot 50 = 150$ numere.	**2p**
	II. Două numere sunt pare şi unul impar. Fie a,b numere pare, iar c număr impar $. \Rightarrow a,b \in \{0,2,4,6,8\}, c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ numere. Total: $3 \cdot 125 = 375$ numere.	**2p**
	III. Toate numerele sunt pare $\Rightarrow 5 \cdot 25 = 125$ numere.	**1p**
	Rezultat=150+375+125=**650 numere**.	**1p**
4	$a = 2009 \cdot 10^{2004} + 2009 \cdot 10^{2000} + ... + 2009 \cdot 10^4 + 2009 =$	**2p**
	$= 2009 \cdot (9+1)^{2004} + 2009 \cdot (9+1)^{2000} + ... + 2009 \cdot (9+1)^4 + 2009 =$	**2p**
	$= 2009 \cdot (M_9 + 1) + 2009 \cdot (M_9 + 1) + ... + 2009 \cdot (M_9 + 1) + 2009 =$ $2009 \cdot (M_9 + M_9 + ... + M_9) + \left(\underbrace{2009 + 2009 + ... + 2009}_{502 ori} \right) =$	**2p**
	$= 2009 \cdot M_9 + 2009 \cdot 502$ $= 287 \cdot 7 \cdot M_9 + 48024 \cdot 21 + 14 = 287 \cdot M_{21} + M_{21} + 14 = M_{21} + 14$ (S-a notat cu M_k multiplul numărului k, $k \in \mathbb{N}^*$). Restul împărţirii numărului **a** prin 21 este **14.**	**1p**

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, iar S este un punct mobil pe latura (BC). Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Problema 3. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferenţa a două pătrate perfecte dacă şi numai dacă ab este număr par.

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Punctele M, N şi P sunt situate pe laturile AC, AB şi BC, respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ şi $\angle CMP = 90°$.

a) Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.

b) Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A VII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că 5 divide $2^n + 3^m$. Să se arate că 5 divide $2^m + 3^n$.

Soluţie Ultima cifră a puterilor lui 2 şi 3 se repetă din 4 în 4, deci vom considera $m = 4k + a$ şi $n = 4p + b$, cu $a, b = 0, 1, 2, 3$. .... **1 punct**

Ultima cifră a lui 2^n este 2,4,8,6 pentru $b = 1, 2, 3, 0$ respectiv, iar ultima cifră a lui 3^m este 3,9,7,1 pentru $a = 1, 2, 3, 0$ respectiv. .... **2 puncte**

Numărul $2^n + 3^m$ are ultima cifră 5 în următoarele cazuri:

i) $a = 2, b = 0$;
ii) $a = b = 1$;
iii) $a = 0, b = 2$;
iv) $a = b = 3$. .... **2 puncte**

În toate cele 4 situaţii de mai sus ultima cifră a lui $2^m + 3^n$ este 5, ceea ce trebuia arătat. .... **2 puncte**

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC, iar S este un punct mobil pe latura (BC). Să se arate că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$.

Soluţie. Fie D piciorul înălţimii din A. Atunci triunghiurile BDM şi DCN sunt isoscele, deoarece $MB = MD$ şi $NC = ND$. .... **2 puncte**

Dacă $S = D$, atunci $MB - MS = 0$, de unde rezultă cerinţa... **1 punct**

Dacă S se află pe segmentul (BD), atunci $MB > MS$ şi $NS > NC$, deci $(MB - MS)(NC - NS) < 0$. .... **2 puncte**

Analog dacă S aparţine segmentului (DC). .... **2 puncte**

Problema 3. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferenţa a două pătrate perfecte dacă şi numai dacă ab este număr par.

Soluţie. Pentru implicaţia directă, presupunem prin absurd că numărul ab este impar. Atunci a şi b sunt numere impare, deci $a^2 + b^2$ este de forma $4k + 2$. .... **2 puncte**

Deoarece $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$, observăm că dacă m, n au aceeaşi paritate rezultă că $a^2 + b^2$ este multiplu de 4, iar dacă m, n au parităţi diferite găsim $a^2 + b^2$ impar, contradicţie. . . . . **2 puncte**

Pentru implicaţia contrară, să observăm că $a^2 + b^2 = 4s$, dacă şi a şi b sunt pare, sau $a^2 + b^2 = 2r + 1$, dacă doar unul este par. . . . . **2 puncte**

În primul caz scriem $4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2$, iar în cel de-al doilea caz avem $(r + 1)^2 - r^2$, ceea ce încheie demonstraţia. . . . . **1 punct**

Problema 4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Punctele M, N şi P sunt situate pe laturile AC, AB şi BC, respectiv, astfel încât $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ şi $\angle CMP = 90°$.

a) Să se arate că triunghiul NMB este isoscel.

b) Să se determine măsura unghiului $\angle CBM$.

Soluţie. a) Fie x măsura unghiului $\angle MBC$. Atunci $\angle ABM = 60° - x$ şi $\angle NMB = 60° - x$, deci $NM = NB$. . . . . **2 puncte**

b) Fie Q un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $CQ = 2 \cdot CA$. Atunci $\Delta QPC \sim \Delta BMC$ şi $QB \perp BC$. Înseamnă că $\angle PQC = x$. . . . . **1 punct**

Fie O mijlocul segmentului PQ. Cum PQ este ipotenuză comună în triunghiurile BPQ şi MPQ, rezultă că $OM = OB = \frac{1}{2} \cdot PQ$. Din $\angle BOM = 60°$ rezultă că triunghiul OBM este echilateral, deci $ON \perp BM$. . . . **1 punct**

Fie S şi T punctele de intersecţie ale dreptei BM cu PN şi PQ respectiv. Avem $\angle BTN = \angle QSM = 120° - 2x$, deci triunghiul PST este isoscel cu $PS = PT$. . . . . **1 punct**

Dacă $T \neq S$, perpendiculara din P pe segmentul TS taie dreapta ON, fiind bisectoarea unghiului $\angle NPO$, în contradicţie cu $ON \perp BM$. Rezultă $T = S$, deci punctele P, N, O, Q sunt coliniare. . . . . **1 punct**

De aici $PB = PM$ şi $x = \angle PBM = \angle PMB = 15°$. . . . . **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care verifică simultan egalităţile $x^2y^2+1 = x^2+xy$, $y^2z^2+1 = y^2+yz$ şi $z^2x^2+1 = z^2+xz$.

Problema 2. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că

$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|.$$

Să se arate că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Problema 3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Fie F piciorul perpendicularei din B pe dreapta MC. Să se determine măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF).

Problema 4. Numerele naturale a şi b verifică relaţia

$$(a^2-9b^2)^2 - 33b = 16. \qquad (1)$$

a) Să se arate că $|a-3b| \geq 1$.
b) Să se determine toate perechile de numere naturale (a, b) care satisfac relaţia (1).

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care verifică simultan egalităţile $x^2y^2+1 = x^2+xy$, $y^2z^2+1 = y^2+yz$ şi $z^2x^2+1 = z^2+xz$.

Soluţie Deoarece $x^2y^2 + 1 \geq 2xy$, rezultă $x^2 \geq xy$ şi analog $y^2 \geq yz$, $z^2 \geq zx$. . . . . **3 puncte**

Dacă unul dintre numere, spre exemplu x, ar fi egal cu 0, înlociund în prima relaţia am avea $1 = 0$, fals, deci x, y, z sunt nenule. . . . . **1 punct**

Atunci $x \geq y \geq z \geq x$, deci $x = y = z$. . . . . **2 puncte**

Obţinem $x^4 + 1 = 2x^2$, de unde $x = 1$ şi apoi $x = y = z = 1$. . . . **1 punct**

Problema 2. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că

$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|.$$

Să se arate că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Soluţie. Fie k valoarea comună a modulelor. Atunci $a-b = \pm k$, $b-c = \pm\frac{1}{2}k$, $c-d = \pm\frac{1}{3}k$, $d-e = \pm\frac{1}{4}k$ şi $e-a = \pm\frac{1}{5}k$ (pentru anumite alegeri a semnelor $+$ şi $-$). . . . . **3 puncte**

Dacă $k = 0$, problema este rezolvată. . . . . **1 punct**

Pentru $k \neq 0$, prin adunarea relaţiilor obţinem $0 = (\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5})k$, deci $\frac{1}{5} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}$, pentru o alegere a semnelor. . . . . **1 punct**

Pentru orice alegere a semnelor, ultima egalitate revine la $\frac{1}{5} = \frac{m}{12}$, cu m întreg, deci 5 divide 12, contradicţie. . . . . **2 puncte**

Problema 3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Fie F piciorul perpendicularei din B pe dreapta MC. Să se determine măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF).

Soluţie. Planele (BFD) şi (ABF) se taie după dreapta BF. Muchiile AB şi DC sunt perpendiculare pe planul (BCC'), deci şi pe dreapta BF. **1 punct**

Dreapta BF este perpendiculară pe DC şi pe FC - din ipoteză - deci pe planul (DFC) şi implicit pe DF. . . . . **2 puncte**

Avem $AB \subset (ABF)$, $AB \perp BF$ şi $DF \subset (DBF)$, $DF \perp BF$, deci măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF) este măsura unghiului dintre dreptele AB şi DF, adică $\angle FDC$, deoarece $AB \parallel DC$. . . . . **2 puncte**

Obţinem din relaţia lui Pitagora că $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. . . . . **1 punct**

În triunghiul dreptunghic FDC avem $\mathrm{tg}\angle FDC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci măsura unghiului dintre cele două plane este de $30°$. . . . . **1 punct**

Problema 4. Numerele naturale a şi b verifică relaţia

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \tag{1}$$

a) Să se arate că $|a - 3b| \geq 1$.

b) Să se determine toate perechile de numere naturale (a, b) care satisfac relaţia (1).

Soluţie. a) Dacă prin absurd $|a - 3b| < 1$, din $|a - 3b| \in \mathbb{N}$ obţinem $|a - 3b| = 0$. . . . . **1 punct**

Atunci $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = -33b \neq 16$. . . . . **1 punct**

b) Deoarece $(a-3b)^2 \geq 1$, avem $16+33b = (a^2-9b^2)^2 = (a+3b)^2(a-3b)^2 \geq (a + 3b)^2 \geq 9b^2$. . . . . **1 punct**

De aici rezultă că $b \leq 4$, deoarece $b \geq 5$ implică $9b^2 \geq 45b = 33b + 12b > 33b + 16$. . . . . **1 punct**

Atunci b este 0, 1, 2, 3 sau 4 şi deci $33b + 16$ =16, 49, 82, 115 sau 148, respectiv. . . . . **1 punct**

Cum $33b + 16$ este pătrat perfect, ... **1 punct**

rămân doar soluţiile $b = 0$ şi $a = 2$ sau $b = 1$ şi $a = 4$; în alte cuvinte, vom obţine perechile $(a, b) = (2, 0)$, respectiv $(4, 1)$. . . . . **1 punct**