Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătați că dreapta de ecuație $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P mijloacele segmentelor BC, BM, respectiv CM. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0,1,2)\right)=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a,b,c)\right)=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.

5p **b)** Determinaţi perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2 6-\log_2 9+\log_2 24=\log_2\frac{6\cdot 24}{9}=$	**3p**
	$=\log_2 16=4$, care este număr natural	**2p**
2.	$f(x)=2\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0$	**2p**
	Cum ecuația $x^2-x=0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte	**3p**
3.	$x^2-5=3x-1\Rightarrow x^2-3x-4=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=4$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea A are C_n^2 submulțimi cu 2 elemente, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, este numărul de elemente ale lui A	**2p**
	$C_n^2=15$, deci $\frac{n(n-1)}{2}=15$, de unde obținem că mulțimea A are 6 elemente	**3p**
5.	M mijlocul lui $BC\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$	**2p**
	M mijlocul lui $NP\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}\right)$, deci $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+\sin x)=0$	**2p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0,1,2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0,1,2))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-2-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&ac-bc&ab-bc\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&-c(b-a)&-b(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c	**3p**
c)	$\det(A(m,n,p))=(n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, obținem $p-m>p-n>0$ și $p-m>n-m>0$	**3p**
	Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n=n-m=1$, deci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**

2.a)	$f = X^4 + X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$, deci $f(\hat{0}) = \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{0}$	**3p**
	$f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$	**2p**
b)	f este divizibil cu $X + \hat{2} \Leftrightarrow f(\hat{1}) = \hat{0}$, deci $a + b = \hat{0}$	**3p**
	Cum $a, b \in \mathbb{Z}_3$, perechile sunt $(\hat{0},\hat{0})$, $(\hat{1},\hat{2})$ și $(\hat{2},\hat{1})$	**2p**
c)	$f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$	**3p**
	Dacă $f(\hat{0})$, $f(\hat{1})$ și $f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) =$ $= \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, ceea ce este fals, deci pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{\left(e^x + xe^x\right)\left(e^x + 2\right) - xe^{2x}}{\left(e^x + 2\right)^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 2xe^x}{\left(e^x + 2\right)^2} = \dfrac{e^x\left(e^x + 2x + 2\right)}{\left(e^x + 2\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 2} = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x - x\left(e^x + 2\right)}{e^x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{e^x + 2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + 2x + 2$ este strict crescătoare și, cum g este continuă, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, există un unic număr real c, astfel încât $g(c) = 0$	**3p**
	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c, +\infty)$ și, cum f este continuă, obținem că f are un unic punct de extrem	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2 + 4x + 5}\,dx = \int_0^1 2(x + 3)\,dx = \left(x^2 + 6x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 + 6 - 0 - 0 = 7$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 \left(f^2(x) - 4\right) dx = \int_0^1 \frac{4(x + 3)^2 - 4\left(x^2 + 4x + 5\right)}{x^2 + 4x + 5}\,dx = 4\int_0^1 \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}\,dx =$	**2p**
	$\displaystyle = 4\int_0^1 \frac{\left(x^2 + 4x + 5\right)'}{x^2 + 4x + 5}\,dx = 4\ln\left(x^2 + 4x + 5\right)\Big\|_0^1 = 4\ln 2$	**3p**
c)	Cum $f^2(x) - 4 = \dfrac{4(2x + 4)}{x^2 + 4x + 5} \geq 0$ și $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, obținem $f(x) \geq 2$, deci $f^n(x) \geq 2^n$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0 \leq a < b$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f^n(x)\,dx \geq 2^n(b - a)$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, obținem că $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$	**3p**