Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a IX-a

Problema 1. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{EA}+\overline{EC}=0$.

Fie T intersecţia dreptelor DC şi BE. Să se determine α real astfel încât

$$\overline{TB}+\overline{TC}=\alpha\overline{TA}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Elementele mulţimii $M=\{1,2,3,\ldots,99,100\}$ se aşează într-un tablou cu 10 linii şi 10 coloane, astfel:

1	2	$\cdots$	10
11	12	$\cdots$	20
$\vdots$			
91	92	$\cdots$	100

Să se arate că oricum am şterge 10 elemente ale tabloului, printre cele 90 de numere rămase există cel puţin 10 numere în progresie aritmetică.

Problema 3. a) Fie $a,b\geq 0$ şi $x,y>0$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\geq\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}.$$

b) Fie $a,b,c\geq 0$ şi $x,y,z>0$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c.$$

Problema 4. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ pentru care

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)},$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a IX-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{EA}+\overline{EC}=0$.

Fie T intersecţia dreptelor DC şi BE. Să se determine α real astfel încât

$$\overline{TB}+\overline{TC}=\alpha\overline{TA}.$$

Soluţie. Observăm că vectorii $\overline{DA}+\overline{DB}$ şi $\overline{EA}+\overline{EC}$ au, respectiv, direcţiile vectorilor necoliniari $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, deci suma lor este 0 doar dacă amândoi sunt 0. . . . . 4 puncte

Deducem că punctele D şi E sunt mijloacele segmentelor AB şi AC, deci T este centrul de greutate al triunghiului ABC. Din relaţia

$$\overline{TA}+\overline{TB}+\overline{TC}=0,$$

rezultă $\alpha=-1$. . . . . 3 puncte

Problema 2. Elementele mulţimii $M=\{1,2,3,\ldots,99,100\}$ se aşează într-un tablou cu 10 linii şi 10 coloane, astfel:

1	2	$\cdots$	10
11	12	$\cdots$	20
$\vdots$			
91	92	$\cdots$	100

Să se arate că oricum am şterge 10 elemente ale tabloului, printre cele 90 de numere rămase există cel puţin 10 numere în progresie aritmetică.

Soluţie. Vom încerca să eliminăm 10 elemente astfel încât printre cele rămase să nu existe 10 în progresie aritmetică.

Observăm, mai întâi, că numerele din fiecare linie şi din fiecare coloană sunt în progresie aritmetică, deci va trebui să eliminăm câte un număr din fiecare linie şi din fiecare coloană. Implicit rezultă că oricare 2 dintre cele 10 numere eliminate trebuie să fie din linii şi coloane diferite......2 puncte

Apoi, dacă numărul eliminat din linia i , $1 \leq i \leq 9$, se află pe coloana k, atunci numărul eliminat din linia $i+1$ trebuie să se afle pe o coloană l, cu $l < k$, altfel, între cele 2 numere rămân în tabel neeliminate cel puţin 10 numere consecutive, care formează o progresie aritmetică......... 3 puncte

Deducem că, pentru a nu rămâne în tabel 10 numere pe aceeaşi linie sau coloană sau 10 numere consecutive, trebuie să eliminăm numerele 10, 19, 28,...,91 (adică numerele de pe diagonala secundară a tabloului).

Dar atunci rămân neeliminate numerele $11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ şi 92, care formează o progresie aritmetică de raţia 9................2 puncte

Problema 3. a) Fie $a, b \geq 0$ şi $x, y > 0$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}.$$

b) Fie $a, b, c \geq 0$ şi $x, y, z > 0$ astfel încât $a+b+c = x+y+z$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a+b+c.$$

Soluţie. a) Inegalitatea este echivalentă cu

$$\left(x^2+2xy+y^2\right)\left(\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\right) \geq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

sau

$$\frac{x^2b^3}{y^2} + 2\frac{a^3y}{x} + 2\frac{b^3x}{y} + \frac{a^3y^2}{x^2} \geq 3a^2b+3ab^2.$$

.... 1 punct

Să observăm că

$$\frac{x^2b^3}{y^2} + 2\frac{a^3y}{x} = \frac{x^2b^3}{y^2} + \frac{a^3y}{x} + \frac{a^3y}{x} \geq 3\sqrt[3]{b^3a^6} = 3a^2b.$$

Analog,

$$2\frac{b^3x}{y} + \frac{a^3y^2}{x^2} \geq 3ab^2,$$

....4 puncte

şi, prin adunare, obţinem inegalitatea cerută.

Observaţii. 1) Eliminând numitorii, inegalitatea se poate scrie sub forma

$$(bx-ay)^2\left(bx^2+2(a+b)xy+ay^2\right) \geq 0,$$

evident adevărată.

2) Dacă $a_i \geq 0$, $x_i > 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ iar $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{k+1}}{x_i^k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{k+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{k}},$$

inegalitatea rezultând din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei $f(x) = x^{k+1}$, pentru $x \in [0, +\infty)$.

b) Folosind inegalitatea precedentă, avem:

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2} = a+b+c.$$

.... 2 puncte

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\frac{f(x+y) + f(x)}{2x + f(y)} = \frac{2y + f(x)}{f(x+y) + f(y)},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Pentru $x = y$ obţinem

$$\frac{f(2x) + f(x)}{2x + f(x)} = \frac{2x + f(x)}{f(2x) + f(x)},$$

de unde

$$\frac{f(2x) + f(x)}{2x + f(x)} = 1,$$

deci $f(2x) = 2x$, adică $f(n) = n$, pentru orice n par. .... 3 puncte

Fie acum x şi y impare. Atunci $x + y$ este par, deci $f(x+y) = x + y$. Din ipoteză obţinem

$$(x-y)^2 + f(x)(y-x) + f(y)(x-y) = 0,$$

sau

$$(x-y)(x - y - f(x) + f(y)) = 0.$$

Deducem că $f(x) - x = f(y) - y$, pentru orice $x \neq y$, deci funcţia $f(x) - x$ e constantă.

Fie $f(x) - x = k$, deci $f(n) = n + k$, pentru n impar. .... 3 puncte

Fie acum x par şi y impar. Obţinem

$$\frac{x + y + k + x}{2x + y + k} = \frac{2y + x}{x + y + k + y + k},$$

de unde $k = 0$. Deducem că $f(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. .... 1 punct

Observaţie. Alternativ, se poate arăta, prin particularizări, că $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, şi apoi, inductiv, că $f(n) = n$, pentru orice n.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea

$$f(g(x)) = g(f(x)) = -x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că f şi g sunt funcţii impare.

b) Daţi un exemplu de funcţii cu proprietatea din enunţ.

Problema 2. Să se determine numerele complexe z_1, z_2, z_3 de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^x = x + 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_3(x+2) + \log_2(3^x - x) = 3^x - 1\}$. Să se arate că:

a) $A \subset B$;

b) $B \not\subset \mathbb{Q}$ şi $B \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problema 4. a) Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe nenule de acelaşi modul astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

b) Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulţimi $A \subset U_n$ cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in A$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a X-a SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTTIVE

Problema 1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea

$$f(g(x)) = g(f(x)) = -x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că f şi g sunt funcţii impare.
b) Daţi un exemplu de funcţii cu proprietatea din enunţ.

Soluţie. a) Din $f(g(x)) = g(f(x)) = -x$ deducem $g(f(g(x)) = g(-x)$ pentru orice x real .... 2 puncte
Din $g(f(x)) = -x$ obţinem că $g(f(g(x))) = -g(x)$ pentruorice $x \in \mathbb{R}$ . . 2 puncte
Cele două relaţii de mai sus implică imparitatea funcţiei g. Analog pentru funcţia f .... 2 puncte
b) Funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin $f(x) = x, g(x) = -x$ verifică proprietate din enunţ .... 1 punct

Problema 2. Să se determine numerele complexe z_1, z_2, z_3 de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3 = 1$.

Soluţie. Din condiţia dată deducem $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .... 1 punct
Prin conjugare, din $z_1+z_2+z_3 = 1$ deducem $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = 1 = z_1z_2z_3$ 2 puncte
Din cele două egalităţi precedente

$$(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$$

.... 2 puncte
de unde $\{z_1, z_2.z_3\} = \{1, i, -i\}$ .... 2 puncte

Problema 3. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^x = x + 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_3(x + 2) + \log_2(3^x - x) = 3^x - 1\}$. Să se arate că:
a) $A \subseteq B$;
b) $B \not\subset \mathbb{Q}$ şi $B \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluţie. a) Fie $x \in A$. Atunci $3^x = x + 2$, de unde $x = \log_3(x + 2)$ şi $1 = \log_2(3^x - x)$. Prin adunare obţinem $\log_3(x+2)+\log_2(3^x-x) = 3^x-1$,adică $x \in B$. Deci $A \subseteq B$ .... 3 puncte

b) $1 \in B$ deci $B \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .... 1 punct

Fie $a \neq 1$ astfel încât $3^a = a + 2$. Atunci $a \in B$ (din a)) şi arătăm că $a \in \mathbb{R} \setminus Q$, deci va rezulta $B \not\subset \mathbb{Q}$. Prin absurd, dacă $a = m/n$ fracţie ireductibilă, implică $3^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} + 2 \in \mathbb{Q}$, deci $3^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q}$, adică $n = 1$ şi prin urmare $3^m = m + 2$, implicând $m = 1$, absurd. .... 3 puncte

Problema 4. a) Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe nenule de acelaşi modul astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

b) Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulţimi $A \subset U_n$ cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in A$.

Soluţie. a) De exemplu, geometric, faptul că numerele au acelaşi modul şi verifică $z + 1 + z_2 + z_3 = 0$ înseamnă că triunghiul cu aceste afixe are $G = H$, deci e echilteral. .... 1 punct

b) Dacă n nu e multiplu de 3, nu există triunghiri echilaterale cu vârfurile în afixe din U_n, deci maximul cerut este n .... 3 puncte

Dacă $n = 3k$, atunci din cele k triunghiuri echilaterale cu vârfuri în U_n putem alege cel mult câte două vârfuri din fiecare, adică cel mult $2k$ elemente. De exemplu $A = \{\omega^3, \omega^6, \ldots, \omega^{3k}\} \cup \{\omega^2, \omega^5, \ldots, \omega^{3k-1}\}$ unde $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ .... 3 puncte

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XI-a

Problema 1. Fie A, B, C trei matrice de ordin 3, care au elemente numere reale şi care îndeplinesc condiţiile: $\det(A) = \det(B) = \det(C)$ şi $\det(A + iB) = \det(C + iA)$. Arătaţi că $\det(A + B) = \det(C + A)$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{pq})_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$, cu proprietatea:

$$a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0, \forall i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Arătaţi că $\text{rang}(A) \leqslant 2$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir definit de

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}}, \forall n \geq 1.$$

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^n$.

Problema 4. a) Arătaţi că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = 2[x] - \cos(3\pi\{x\})$ are proprietăţile: funcţia F este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuaţia $F(x) = y$ are exact trei soluţii ($[x]$ este partea întreagă a lui x).

b) Fie $k > 0$ un număr întreg par. Arătaţi că nu există nicio funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y \in \text{Im}f$, ecuaţia $f(x) = y$ are exact k soluţii ($\text{Im}\, f$ este mulţimea valorilor funcţiei f).

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XI-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Fie A, B, C trei matrice de ordin 3, care au elemente numere reale şi care îndeplinesc condiţiile: $\det(A+iB)=\det(C+iA)$ şi $\det(A)=\det(B)=\det(C)$. Arătaţi că $\det(A+B)=\det(C+A)$.

Soluţie. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det(A+xB)-\det(C+xA)$ (**1 punct**). Această funcţie este polinomială şi are grad ≤ 3 (**1 punct**). Din ipoteză, coeficientul lui x^3 este $\det(B)-\det(A)=0$, $f(0)=\det(A)-\det(C)=0$ şi $f(i)=\det(A+iB)-\det(C+iA)=0$ (**3 puncte**). Rezultă că funcţia este de forma $f(x)=ax^2+bx$, cu $-a+bi=0, a,b\in\mathbb{R}$, deci $a=b=0$, $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $\det(A+B)-\det(C+A)=f(1)=0$ (**2 puncte**).

Problema 2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi o matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$, cu proprietatea: $a_{ij}+a_{jk}+a_{ki}=0, \forall i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Arătaţi că $\operatorname{rang}(A)\leqslant 2$.

Soluţie. Arătăm că, dacă $n\geq 3$, atunci orice minor de ordin 3 este nul (**1 punct**). Luând $i=j=k$ rezultă $a_{ii}=0, \forall i$ (**1 punct**), iar $k=i\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0, \forall i,j$ (**1 punct**). Să considerăm un minor oarecare D de ordin 3, făcut cu elemente de pe liniile i,j,k şi coloanele p,q,r. În D, scăzând prima linie din a doua obţinem linia $L=(a_{jp}-a_{ip}, a_{jq}-a_{iq}, a_{jr}-a_{ir})$. Avem $a_{js}-a_{is}=a_{js}+a_{si}=-a_{ij}$ pentru $s=p,q,r$, deci linia L are elementele egale. Analog, linia obţinută prin scăderea primei linii din linia a treia are elemente egale. De aici, $D=0$ (**4 puncte**).

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit de $x_1=2, x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{1}{n}}$, $\forall n\geq 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n$.

Soluţie. Avem, inductiv, $1\leq x_n\leq 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (**1 punct**) şi $x_n\geq x_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (**1 punct**), deci şirul $(x_n)_n$ are o limită $L\geq 1$ care verifică relaţia $L=\sqrt{L}$, deci $L=1$ (**1 punct**).

Pentru a doua limită, scriem $x_n^n=u_n^{v_n}$, cu $u_n=(1+x_n-1)^{\frac{1}{x_n-1}}\to \mathrm{e}$ (**1 punct**), iar pentru limita şirului $v_n=n(x_n-1)$ observăm inductiv că $x_n\geq 1+\frac{1}{n}, \forall n\geq 5$ şi $x_n<1+\frac{1}{n-4}, \forall n\geq 5$, deci, din teorema cleştelui, $v_n\to 1$ (**3 puncte**).

Problema 4. a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=2[x]-\cos(3\pi\{x\})$ are proprietăţile: funcţia F este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y\in\mathbb{R}$, ecuaţia $F(x)=y$ are exact trei soluţii.

b) Fie $k>0$ un număr întreg par. Arătaţi că nu există nicio funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile: funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y\in \operatorname{Im} f$, ecuaţia $f(x)=y$ are exact k soluţii.

Soluţie. a) Deoarece funcţia $[\cdot]$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, F este produs, compunere şi diferenţă de funcţii continue, deci este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (**1 punct**). În punctele $a\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\searrow a} F(x)=2a-\cos 0=2a-1$, $\lim\limits_{x\nearrow a} F(x)=2(a-1)-\cos 3\pi=2a-1$, $F(a)=2a-1$, deci F este continuă (**1 punct**). În plus, dacă $y\notin 2\mathbb{Z}+1$ ecuaţia $f(x)=y$ are trei soluţii, situate în intervalul $\left(\left[\frac{y+1}{2}\right],\left[\frac{y+1}{2}\right]+1\right)$, iar dacă $y\in 2\mathbb{Z}+1$ ecuaţia $f(x)=y$ are soluţiile $\frac{y+1}{2}$, $\frac{3y+7}{6}$ şi $\frac{3y-1}{6}$ (numărul soluţiilor se poate deduce şi urmărind graficul funcţiei F) (**1 punct**).

b) Să presupunem că există o astfel de funcţie. Fie $\lambda\in\mathrm{Im}f$ şi $x_1<x_2<\ldots<x_{2k}$ soluţiile ecuaţiei $f(x)=\lambda$. Atunci, pe fiecare din intervalele $I_0=(-\infty,x_1), I_1=(x_1,x_2),\ldots,I_{2k}=(x_{2k},\infty)$ diferenţa $d(x)=f(x)-\lambda$ are semn constant (**2 puncte**).

Dacă $d(x)$ are semnul „$+$" pe I_0 şi pe I_{2k}, atunci f este mărgintă inferior pe fiecare din intervalele $I_0,I_1,\ldots,I_{2k}$, deci pe $\mathbb{R}$. În plus, marginea inferioară $m=\inf f$ este atinsă în $[x_0,x_{2k}]$. Fie $t_1<t_2<\ldots<t_{2k}$ punctele în care se atinge marginea inferioară. În acest caz, alegând vecinătăţi disjuncte $V_1,V_2,\ldots,V_{2k}$ ale punctelor $t_1,t_2,\ldots,t_{2k}$ şi $y>m$, suficient de apropiat de m, găsim în fiecare V_i câte două soluţii ale ecuaţiei $f(x)=y$. Rezultă astfel cel puţin $4k$ soluţii ale ecuaţiei $f(x)=y$ – contradicţie. Cazul când $d(x)$ are semnul „$-$" pe I_0 şi pe I_{2k} se tratează analog (**1 punct**).

Dacă $d(x)$ are semne opuse pe I_0 şi I_{2k}, pe cel puţin k dintre cele $2k-1$ intervale $I_1,\ldots,I_{2k-1}$ funcţia $d(x)$ are acelaşi semn, de exemplu „$+$". În acest caz, pentru $y>\lambda$, suficient de apropiat de λ, ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin $2k$ soluţii pe $[x_0,x_{2k}]$ şi o soluţie pe I_0 sau I_{2k} – contradicţie (**1 punct**).

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XII-a

Problema 1. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie descrescătoare, astfel încât $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<1$, oricare ar fi $x\geq 0$. Să se arate că:
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ există şi este finită;
b) $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$.

Problema 2. Fie A un inel comutativ cu n elemente, $n\geq 2$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $x^2=x$, oricare ar fi $x\in A$;
b) numărul funcţiilor polinomiale $\tilde{f}:A\to A$ este n^2.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x=0.$$

Să se arate că:
a) există un punct $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=0$;
b) există un punct $b\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x=bf(b)$.

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente şi $n\geq q$, $n\in\mathbb{N}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un polinom din mulţimea polinoamelor de grad n din $K[X]$, acesta să nu aibă nicio rădăcină în K.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie descrescătoare, astfel încât $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < 1$, oricare ar fi $x \geq 0$. Să se arate că:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ există şi este finită;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Soluţie. (a) Concluzia rezultă din faptul că funcţia $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, este crescătoare şi mărginită.

. . . . **3 puncte**

(b) Dacă $x > 0$, atunci $F(x) - F(x/2) = \displaystyle\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t \geq (x/2)f(x) \geq 0$. Cum $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(x/2)) = 0$, rezultă că $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

. . . . **4 puncte**

Problema 2. Fie A un inel comutativ cu n elemente, $n \geq 2$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$;

(b) numărul funcţiilor polinomiale $\tilde{f} : A \to A$ este n^2.

Soluţie. Mai întâi arătăm că numărul funcţiilor polinomiale ale inelului A este cel puţin n^2.

Fie $f, g \in A[X]$, $f = aX + b$ şi $g = cX + d$. Dacă f şi g au aceeaşi funcţie polinomială, atunci $f(0) = g(0)$ şi $f(1) = g(1)$, de unde $b = d$ şi $a = c$, deci $f = g$. Întrucât există n^2 polinoame de grad cel mult 1, rezultă că există cel puţin n^2 funcţii polinomiale.

. . . . **3 puncte**

Arătăm că (a) implică (b). Fie $f = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $k \geq 1$. Cum $\tilde{f}(x) = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1)x + a_0 = ax + a_0$, oricare ar fi $x \in A$, rezultă că $\tilde{f} = \tilde{g}$, unde $g = aX + a_0$. Prin urmare, numărul funcţiilor polinomiale este exact n^2.

.... **2 puncte**

Pentru a demonstra implicaţia inversă, considerăm polinoamele $f = X^2$ şi $g = aX + b$, unde $\tilde{f} = \tilde{g}$. Rezultă că $x^2 = ax + b$, oricare ar fi $x \in A$. Pentru $x = 0$, obţinem $b = 0$; apoi, pentru $x = 1$, obţinem $a = 1$. Deci $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

.... **2 puncte**

Problema 3. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 (x-1) f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că:

(a) funcţia $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, $H(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x t f(t) \mathrm{d}t - \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$, dacă $x \in (0,1]$, şi $H(0) = 0$, îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[0,1]$;

(b) există un punct $a \in (0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^a x f(x) \mathrm{d}x = a f(a)$.

Soluţie. (a) Fie funcţiile derivabile $F, G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \mathrm{d}t$ şi $G(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t) \mathrm{d}t$. Rezultă $H(x) = G(x)/x - F(x)$, $0 < x \leq 1$. Întrucât $\lim\limits_{x \to 0} H(x) = G'(0) - F(0) = 0$, rezultă că H este continuă în 0. Concluzia rezultă din faptul că $H(0) = H(1) = 0$ şi H este derivabilă pe $(0,1]$.

.... **2 puncte**

(b) Din teorema lui Rolle rezultă că există un punct $b \in (0,1)$, astfel încât $H'(b) = 0$. Întrucât

$$H'(x) = \frac{x^2 f(x) - G(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{G(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 1,$$

obţinem $G(b) = 0$.

.... **2 puncte**

Aplicând teorema lui Rolle funcţiei $K : [0,b] \to \mathbb{R}$, $K(x) = \mathrm{e}^{-x} G(x)$, rezultă că există un punct $a \in (0,b)$, astfel încât $K'(a) = 0$, i. e. $G(a) = G'(a)$.

. . . . **3 puncte**

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente şi $n \geq q$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un polinom din mulţimea polinoamelor de grad n din $K[X]$, acesta să nu aibă nicio rădăcină în K.

Soluţie. Fie f un polinom de grad n şi g restul împărţirii lui la polinomul $X^q - X$. Cum rădăcinile lui $X^q - X$ sunt toate elementele lui K, polinoamele din $K[X]$ de grad n, care au aceeaşi funcţie polinomială cu f, sunt cele de forma $(X^q - X)c + g$, unde gradul lui c este $n - q$, deci numărul lor este $q^{n-q}(q-1)$.

. . . . **2 puncte**

Întrucât numărul polinoamelor de grad n din $K[X]$ este $q^n(q-1)$, rezultă că numărul funcţiilor polinomiale ataşate polinoamelor de grad n este

$$\frac{q^n(q-1)}{q^{n-q}(q-1)} = q^q,$$

adică exact numărul funcţiilor de la K în K.

. . . . **3 puncte**

Cum numărul funcţiilor de la K în K^* este $(q-1)^q$, rezultă că numărul polinoamelor de grad n, care nu au nicio rădăcină în K, este $(q-1)^q \cdot (q-1)q^{n-q} = (q-1)^{q+1}q^{n-q}$. Deci probabilitatea cerută este

$$\frac{(q-1)^{q+1}q^{n-q}}{q^n(q-1)} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^q.$$

. . . . **2 puncte**