Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax+1$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(2,1)$ aparţine graficului funcţiei f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}+3^x=30$.

5p **4.** Un obiect costă 500 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(8,3)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați distanța de la punctul M la punctul $O(0,0)$.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ şi $AC=10$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $A\cdot A-3A=I_2$.

5p **c)** Se consideră matricea $X=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot X-X\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 2=29$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x\circ x\le 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx=\frac{e^2+a}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=(2,5-0,5)(2,5+0,5)=$	**2p**
	$=2\cdot 3=6$	**3p**
2.	$f(2)=1\Rightarrow 4-2a+1=1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$3^x\left(3^2+1\right)=30\Leftrightarrow 3^x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 500=100$ de lei	**3p**
	Prețul după scumpire este $500+100=600$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(4,3)$	**2p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=$	**2p**
	$=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 3=$	**3p**
	$=2-3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3y-x & -x\\ y & x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$ și $y=-1$	**3p**
2.a)	$3\circ 2=4\cdot 3\cdot 2+3+2=$	**3p**
	$=24+5=29$	**2p**

b)	$x\circ y=\frac{16xy+4x+4y}{4}=\frac{16xy+4x+4y+1-1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{4x(4y+1)+(4y+1)-1}{4}=\frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ x=\frac{(4x+1)^2-1}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{(4x+1)^2-1}{4}\le 2\Leftrightarrow (4x+1)^2\le 9\Leftrightarrow -3\le 4x+1\le 3$, de unde obținem $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$	**3p**
	$=e^x+\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=e^x+\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow 1-x^2\ge 0\Rightarrow f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]\Rightarrow f(-1)\le f(x)\le f(1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
	Cum $f(-1)=\frac{2-e}{2e}$ și $f(1)=\frac{2e+1}{2}$, obținem $\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}$	**2p**
b)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x(x+1)^2\,dx=\pi\int_0^1\left(x^3+2x^2+x\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17\pi}{12}$	**2p**
c)	$\int_1^e\frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$, deci $a=1$	**2p**