

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x) = x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 1| = 2x + 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.
- 5p 5. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. În triunghiul ABC dreptunghic în A , $BC = 12$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \cdot A(2^3) \cdot A(2^4) = A(32) \cdot A(-n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x^2 - 5xy + 2y^2$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 2 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ x = 0$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $2^x \circ 3^x = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)} + 2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \leq (x-1)^2$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (4 - f^2(x)) dx = \pi$.

- 5p** | b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(\sqrt{2}-1)$.
- 5p** | c) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \ln(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4)$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 36 = \log_2 6^2 =$ $= 2\log_2 6$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p
2.	$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$	3p 2p
3.	$2x - 1 = 2x + 1$ sau $2x - 1 = -2x - 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4 \cdot 5 = 20$ de numere care au cifra zecilor pară și cifra unităților impară, deci sunt 20 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{a}{8} = \frac{1}{2}$ $a = 4$	3p 2p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4 =$ $= -3 + 4 = 1$	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b-1 & 4b-4 \\ 1-b & 3-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b-3 & 4a+4b-8 \\ -a-b+2 & -2a-2b+5 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2(a+b-1)-1 & 4(a+b-1)-4 \\ 1-(a+b-1) & 3-2(a+b-1) \end{pmatrix} = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \cdot A(2^3) \cdot A(2^4) = A(1+2+2^2+2^3+2^4-4) = A(27)$ $A(27) = A(32+(-n)-1)$, de unde obținem $n = 4$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 2 = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 =$ $= 3 - 10 + 8 = 1$	3p 2p
b)	$x \circ x = 3x^2 - 5x^2 + 2x^2 =$ $= -2x^2 + 2x^2 = 0$, pentru orice număr real x	3p 2p

c)	$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x (2^x - 3^x) - 2 \cdot 3^x (2^x - 3^x) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 3^x)(3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x) = 0$	3p
	$2^x = 3^x$ sau $3^{x-1} = 2^{x-1}$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - x' =$	3p
	$= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1 = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(-1) = 2, f'(-1) = -1$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$, adică $y = -x + 1$	3p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice număr real x , deci f este descrescătoare pe \mathbb{R} și, cum $x^2 + 1 \geq 2x$, obținem $f(x^2 + 1) \leq f(2x)$, pentru orice număr real x	3p
	Cum $f(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1) + 2} - (x^2 + 1)$ și $f(2x) = \sqrt{(2x)^2 + 2 \cdot 2x + 2} - 2x$, obținem $\sqrt{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1) + 2} - \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \leq (x - 1)^2$, pentru orice număr real x	2p
2.a)	$\int_0^1 (4 - f^2(x)) dx = \int_0^1 \left(4 - \frac{4x^2}{x^2 + 1}\right) dx = 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 4 \operatorname{arctg} x \Big _0^1 =$	3p
	$= 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \pi$	2p
b)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$	3p
	$= 2\sqrt{x^2 + 1} \Big _0^1 = 2(\sqrt{2} - 1)$	2p
c)	$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 \frac{2x^2}{1 \cdot x \sqrt{x^4 + 1}} dx = \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx = \int_1^2 \frac{(x^2)'}{\sqrt{(x^2)^2 + 1}} dx =$	3p
	$= \ln \left(x^2 + \sqrt{x^4 + 1} \right) \Big _1^2 = \ln \frac{4 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{2}} = \ln(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4)$	2p