Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

26 August 2020

Gradul didactic II

Metodica predării matematicii
Varianta 1

1. Considerăm polinomul $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 2$.
a) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile complexe ale lui P, calculaţi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, apoi demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$.
b) Un elev afirmă:

"Deoarece suma pătratelor rădăcinilor polinomului P este pozitivă, toate rădăcinile polinomului sunt reale."

Cum procedaţi pentru a-i arăta elevului că nu are dreptate? De unde provine eroarea elevului?
c) Propuneţi întrebări (minim două) pe care ar trebui să le adresaţi elevilor, la clasă, pentru a rezolva problema:

Demonstraţi că polinomul P se descompune ca un produs de două polinoame neconstante, cu coeficienţi întregi.

Includeţi în răspuns o rezolvare a problemei de mai sus.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural nenul. Definim funcţiile $f_n : D_n \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = \arcsin(1-x^n)$. Am notat cu $D_n \subseteq \mathbb{R}$ domeniul maxim de definiţie al funcţiei f_n.
a) Determinaţi D_3 şi mulţimea punctelor în care funcţia f_3 este derivabilă. Indicaţi eventuale dificultăţi pe care elevii le pot întâmpina pe parcursul rezolvării (minim 2 dificultăţi).
b) Considerăm şirul de numere reale $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Propuneţi două exerciţii ajutătoare, utile în argumentarea convergenţei şirului. Apoi demonstraţi că şirul este convergent.
c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Prezentaţi cel puţin o greşeală pe care elevii o pot face încercând să calculeze această limită.

3. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon convex cu $n \geq 3$ laturi din planul π. Notăm cu f_n compunerea $f_n = S_{A_n} \circ S_{A_{n-1}} \circ \cdots \circ S_{A_1}$, unde $S_{A_i} : \pi \to \pi$ este simetria planului π faţă de punctul A_i.
a) Se consideră următoarea problemă (pentru cazul $n = 4$):

Arătaţi că $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă f_4 este identitatea planului ($f_4(P) = P$ pentru orice $P \in \pi$)

Propuneţi indicaţii, în funcţie de nivelul clasei, pentru cel puţin două metode de rezolvare a acestei probleme. Rezolvaţi complet problema folosind una dintre metodele propuse.
b) Demonstraţi că $f_3 = S_{A_3} \circ S_{A_2} \circ S_{A_1}$ este o simetrie centrală (aici $n = 3$). Un elev întreabă dacă există o legătură între această problemă şi cea de la punctul precedent. Ce explicaţii îi puteţi da?
c) Arătaţi că $f_n \circ f_n$ este identitatea planului π dacă n este un număr natural impar. Propuneţi o secvenţă de (minimum trei) exerciţii ajutătoare care să justifice raţionamentul făcut şi care să conducă la rezolvarea problemei. Rămâne adevărată afirmaţia dacă n este un număr par? Justificaţi.

Se vor trata două subiecte la alegere.