**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=3$ și $a_3=5$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Determinaţi numărul natural $n$ pentru care $f(n)=3$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-1$.

**5p** **4.** Determinaţi numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ și $Q(1,a)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele $MN$ și $PQ$.

**5p** **6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei $BC$ a triunghiului dreptunghic $ABC$, în care $AB=5$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**5p** **b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă $a$ și $b$ sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale $x$ și $t$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

**5p** **c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

**2.** Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $3*3=12$.

**5p** **b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

**5p** **c)** Determinaţi $x\in M$ pentru care $(x^2+2x)*3=7$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătaţi că funcţia $f$ este convexă.

**5p** **c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\leq x_2$, atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.

**2.** Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2(f(x))^3dx=\frac{1}{12}$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $\int_0^1 (f(x))^{n+1}dx\leq\int_0^1 (f(x))^n dx$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $r = a_3 - a_2 = 2$ | **3p** |
| | $a_1 = a_2 - r = 1$ | **2p** |
| **2.** | $f(n) = n^2 - 1$, deci $n^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 - 4 = 0$ | **3p** |
| | Cum $n$ este număr natural, obținem $n = 2$ | **2p** |
| **3.** | $x^2 - 9 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x = 10$ | **3p** |
| | $x = 5$, care convine | **2p** |
| **4.** | Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$ este egal cu $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} =$ | **3p** |
| | $= 4$ | **2p** |
| **5.** | $m_{MN} = 1$, $m_{PQ} = \frac{3-a}{3}$ | **2p** |
| | $MN \parallel PQ$, de unde obținem $m_{MN} = m_{PQ} \Leftrightarrow 3 - a = 3 \Leftrightarrow a = 0$ | **3p** |
| **6.** | $\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{BC}$ | **3p** |
| | $BC = 10$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **3p** |
| | $\det(A \cdot A) = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **2p** |
| **b)** | $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix}$ și $X \cdot A = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $ay = by$ și $az = bz$, deci $y(a-b) = 0$ și $z(a-b) = 0$ și, cum $a \neq b$, obținem $y = z = 0$, deci există numerele reale $x$ și $t$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ | **2p** |
| **c)** | $Y \cdot Y = A$, deci $A \cdot Y = (Y \cdot Y) \cdot Y = Y \cdot (Y \cdot Y) = Y \cdot A$, deci $Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | **2p** |
| | $Y \cdot Y = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\alpha^2 = 4$ și $\beta^2 = 0$, deci $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, care convin | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $3*3=3\sqrt{3+1}+3\sqrt{3+1}=$<br>$=3\cdot 2+3\cdot 2=6+6=12$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $x*0=x\cdot\sqrt{0+1}+0\cdot\sqrt{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$<br>$0*x=0\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\sqrt{0+1}=x$, pentru orice $x\in M \Rightarrow x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$ | **2p**<br>**3p** |
| **c)** | $\left(x^2+2x\right)\sqrt{3+1}+3\sqrt{x^2+2x+1}=7 \Leftrightarrow 2\left(x^2+2x\right)+3\sqrt{\left(x+1\right)^2}=7 \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0$<br>$x=-4$, care nu convine, $x=\frac{1}{2}$, care convine | **3p**<br>**2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=x'\ln(x+1)+x\left(\ln(x+1)\right)'=$<br>$=1\cdot\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $f''(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$<br>$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția $f$ este convexă | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $\ln(x+1)\le 0$ și $\frac{x}{x+1}\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci $f'(x)\le 0$, de unde obținem că $f$ este descrescătoare pe $(-1,0]$<br>Pentru orice $x_1,x_2\in(-1,0]$ cu $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$, deci $x_1\ln(x_1+1)\ge x_2\ln(x_2+1)$ de unde obținem $\ln(x_1+1)^{x_1}\ge\ln(x_2+1)^{x_2}$, deci $(x_1+1)^{x_1}\ge(x_2+1)^{x_2}$, adică $g(x_1)\ge g(x_2)$ | **2p**<br>**3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\|_0^1=$<br>$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{12}\left(1-x^3\right)^4\Big\|_0^1=$<br>$=0-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx=-\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul $n$<br>$x^3\ge 0$ și $1-x^3\ge 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx\le 0$, de unde obținem $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p**<br>**3p** |