Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=\frac{399}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=10-x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7\left(x^2+13\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20%, preţul unei tablete este 800 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(2,7)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați lungimea segmentului AM.

5p **6**. Arătați că $2\sin^2 30°-\sin^2 45°=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-2$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(-a)=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătaţi că $3*2=11$.

5p **b)** Demonstrați că $x*(-x)=1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*4=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=2\ln\frac{5}{4}$.

5p **c)** Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=100-\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{400-1}{4}=\frac{399}{4}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x+1=10-x$	**3p**
	$3x=9\Rightarrow x=3$	**2p**
3.	$x^2+13=7^2\Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	$p-\frac{20}{100}\cdot p=800$, unde p este prețul tabletei înainte de ieftinire	**3p**
	$p=1000$ de lei	**2p**
5.	$AB=6$	**2p**
	$AM=\frac{AB}{2}=3$	**3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$2\sin^2 30°-\sin^2 45°=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-1-1=-2$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a+1 & 1\\ 1 & -a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a^2 & 0\\ 0 & 2-a^2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\left(2-a^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=-1\neq 0$, deci există $(A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=A^{-1}(1)\cdot A(2)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$3*2=3^2+3\cdot 2-3-2+1=$	**3p**
	$=9+6-3-2+1=11$	**2p**

b)	$x*(-x)=x^2+x\cdot(-x)-x-(-x)+1=$	**3p**
	$=x^2-x^2-x+x+1=1$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$2^{2x}+4\cdot 2^x-2^x-4+1=1 \Leftrightarrow 2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0 \Leftrightarrow (2^x+4)(2^x-1)=0$	**3p**
	$2^x=1$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x^2+2x+2)-(x^2+2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(2x+2)(x^2+2x+2-x^2-2x-3)}{(x^2+2x+2)^2}=\dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$; pentru $x\in(-\infty,-1]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pentru $x\in[-1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, f este continuă și $f(x)\neq 1$, pentru orice număr real x, deci $\operatorname{Im} f=(1,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\int_0^1 (x+2)\,dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\right\vert_0^1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^1 \left(f^2(x)-1\right)dx=\int_0^1\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}-1\right)dx=\int_0^1\dfrac{4x}{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=2\ln\left.\left(x^2+4\right)\right\vert_0^1=2\ln 5-2\ln 4=2\ln\dfrac{5}{4}$	**3p**
c)	$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt+\int_0^x\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}\,dt=\left.\left(\sqrt{t^2+4}+2\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)\right)\right\vert_0^x=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2+4}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)-2-2\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**