

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

29 iulie 2020

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră numărul natural k , $k \geq 2$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2k$.
- 5p a) Pentru $k = 3$, determinați numărul natural n pentru care $f(n) = 9$.
- 5p b) Determinați numărul natural k , $k \geq 2$, știind că dreapta de ecuație $y = 4x + 5$ intersectează graficul funcției f în exact un punct.
- 5p c) Demonstrați că mulțimea numerelor naturale n pentru care numărul $f(n)$ este pătratul unui număr natural este nevidă.
2. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Punctul M este mijlocul segmentului AD , punctul B' este simetricul punctului B față de dreapta CM și punctul C' este simetricul punctului C față de dreapta BM . Dreptele BC' și CB' se intersectează în punctul E .
- 5p a) Arătați că $4MD^2 = BD \cdot DC$.
- 5p b) Demonstrați că punctul M este centrul cercului înscris în triunghiul BCE .
- 5p c) Demonstrați că $BE + CE = \frac{5}{3}BC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - 13X^2 + 35$.
- 5p a) Determinați rădăcinile polinomului $g = f + 1$.
- 5p b) Demonstrați că $f(x) \geq 83$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că **nu** există $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[X]$, de grad cel puțin 1, astfel încât $f = h_1 h_2$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.
- 5p b) Demonstrați că $f(x) > e + 2$, pentru orice $x \in (0, 1)$.
- 5p c) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \ln \frac{e^2 + 2e}{e^2 + 3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VII-a

1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

- Identificarea triunghiurilor dreptunghice în configurații geometrice date
- Identificarea catetelor și a ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic dat
- Folosirea instrumentelor geometrice pentru a identifica proiecția unui punct/segment pe o dreaptă

<ul style="list-style-type: none"> - Identificarea proiecției unui segment pe o dreaptă în diferite configurații geometrice - Realizarea unor decupaje după indicații date (de exemplu, decuparea unui triunghi de-a lungul unei înălțimi)
<p>2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calcularea lungimilor unor segmente utilizând teorema înălțimii, teorema catetei sau teorema lui Pitagora - Calcularea ariei unui triunghi oarecare folosind descompunerea suprafeței sale în triunghiuri dreptunghice - Calcularea sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei pentru unghiuri ascuțite ale unui triunghi dreptunghic
<p>3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic</p> <ul style="list-style-type: none"> - Aplicarea teoremei lui Pitagora, a teoremei înălțimii sau a teoremei catetei, pentru a determina elemente ale unui triunghi dreptunghic - Determinarea valorilor pentru sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° sau 60° - Utilizarea valorilor pentru sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° sau 60° pentru determinarea unor lungimi de segmente într-un triunghi dreptunghic - Determinarea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri, perimetre în configurații geometrice
<p>4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizarea reciprocei teoremei lui Pitagora pentru stabilirea perpendicularității a două drepte sau a naturii unui triunghi - Observarea diferenței dintre condițiile necesare și suficiente în contexte geometrice referitoare la relații metrice - Identificarea unor situații particulare și evidențierea unor proprietăți în contexte geometrice referitoare la relații metrice
<p>5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic</p> <ul style="list-style-type: none"> - Determinarea elementelor unui triunghi dreptunghic utilizând relațiile metrice și trigonometrice studiate - Utilizarea valorilor pentru sinus, cosinus, tangentă sau cotangentă din tabele trigonometrice în rezolvarea unor probleme practice - Utilizarea unor metode de calculare a ariei unui triunghi sau a unui patrulater - Analizarea unor metode alternative de rezolvare a problemelor de geometrie utilizând relații metrice și elemente de trigonometrie
<p>6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic</p> <ul style="list-style-type: none"> - Analizarea prin activități de grup sau individuale a unor situații care necesită folosirea relațiilor metrice în triunghiul dreptunghic - Compararea diferitelor metode utilizate în rezolvarea unor probleme referitoare la relații metrice într-un triunghi dreptunghic - Rezolvarea unor probleme prin estimarea unor mărimi din situații practice, folosind triunghiul dreptunghic (de exemplu, verificarea faptului că un dulap așezat în poziție orizontală poate fi ridicat în poziție verticală, în condițiile unei camere de înălțime dată)

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>7. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC</p> <ul style="list-style-type: none"> • Proiecții ortogonale pe o dreaptă; teorema înălțimii; teorema catetei • Teorema lui Pitagora; reciproca teoremei lui Pitagora • Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit • Rezolvarea triunghiului dreptunghic; aplicații: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat; aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Rezolvarea triunghiului dreptunghic”, care să cuprindă 6 itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme*. Pentru fiecare item menționați competența specifică evaluată și activitatea de învățare selectată dintre cele sugerate în programa școlară.

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței specifice evaluate și a activității de învățare selectate, respectarea formatului itemului, elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

29 iulie 2020

**Probă scrisă
MATEMATICĂ**

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$, deci $f(n) = 9 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 3 = 0$ Cum n este număr natural, obținem $n = 1$	3p 2p
	b) $f(x) = 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ Dreapta de ecuație $y = 4x + 5$ intersectează graficul funcției f în exact un punct dacă și numai dacă ecuația $x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ are exact o soluție număr real, deci $4 - 4(2k - 5) = 0$, de unde obținem $k = 3$, care convine	2p 3p
	c) De exemplu, $f(k - 2) = (k - 2)^2 + 2(k - 2) + 2k = k^2 - 4k + 4 + 2k - 4 + 2k = k^2$ Deoarece $k - 2$ este număr natural, mulțimea numerelor naturale n pentru care numărul $f(n)$ este pătratul unui număr natural este nevidă	3p 2p
2.	a) $\triangle ABC$ este dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$, deci $AD^2 = BD \cdot DC$ Cum punctul M este mijlocul segmentului AD , obținem $AD = 2MD$, deci $4MD^2 = BD \cdot DC$	3p 2p
	b) Punctul B' este simetricul punctului B față de dreapta $CM \Rightarrow$ semidreapta CM este bisectoarea unghiului BCB' , deci semidreapta CM este bisectoarea unghiului BCE Punctul C' este simetricul punctului C față de dreapta $BM \Rightarrow$ semidreapta BM este bisectoarea unghiului CBC' , deci semidreapta BM este bisectoarea unghiului CBE și, cum $BM \cap CM = \{M\}$, obținem că punctul M este centrul cercului înscris în triunghiul BCE	2p 3p
	c) $MD = r$, unde r este raza cercului înscris în $\triangle BCE$, deci $4r^2 = BD \cdot DC$ $BE = x$, $CE = y$, $BC = a$ și $p = \frac{1}{2}(x + y + a)$, deci $\mathcal{A}_{\triangle BCE} = pr = \sqrt{p(p - a)(p - x)(p - y)}$, de unde obținem $pr^2 = (p - a)(p - x)(p - y)$ $BD = p - y$ și $DC = p - x$, deci $p = 4(p - a) \Rightarrow 3p = 4a \Rightarrow x + y + a = \frac{8a}{3}$, de unde obținem $BE + CE = \frac{5}{3}BC$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $g = X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2 - 4)(X^2 - 9) =$ $= (X - 2)(X + 2)(X - 3)(X + 3)$, deci rădăcinile polinomului g sunt $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ și $x_4 = 3$	2p 3p
----	---	----------

	<p>b) $f(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) - 1$ Cum $x \geq 4$, obținem $x-3 \geq 1$, $x-2 \geq 2$, $x+2 \geq 6$ și $x+3 \geq 7 \Rightarrow f(x) \geq 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 - 1$, deci $f(x) \geq 83$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>c) Dacă $f = h_1 h_2$, unde $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[X]$, de grad cel puțin 1, atunci $h_1(a)h_2(a) = f(a) = -1$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$ și, cum $h_1(a), h_2(a) \in \mathbb{Z}$, obținem că $h_1(a) = -h_2(a) \in \{-1, 1\}$, deci $h_1(a) + h_2(a) = 0$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$ Polinomul $h = h_1 + h_2$ are gradul cel mult 3 și $h(a) = 0$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$, deci $h = 0$, de unde obținem $h_1 = -h_2$, deci $f = -h_1^2$, ceea ce este imposibil, deoarece h_1 are coeficienți reali și $f(4) > 0$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.	<p>a) $f'(x) = \frac{(e^x + 1)x - (e^x + x + 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2} = -\infty$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>b) Se consideră funcția $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x - e^x - 1 \Rightarrow g'(x) = xe^x > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci g este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ $g(1) = -1$, deci $g(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 1]$, de unde obținem că $f(x) > f(1) = e + 2$, pentru orice $x \in (0, 1)$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>c) $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{x}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \frac{x + e^x + 1 - (e^x + 1)}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{(e^x + x + 1)'}{e^x + x + 1} \right) dx =$ $= \left(x - \ln(e^x + x + 1) \right) \Big _1^2 = 1 - \ln \frac{e^2 + 3}{e + 2} = \ln \frac{e^2 + 2e}{e^2 + 3}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

<i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 1p 1p 1p