MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ

O FIȘĂ DE continuitate si derivabilitate – EXCEPȚIONALĂ

SUBIECTE DATE UPB BUCURESTI ANII 2019-2013

FIȘĂ RECAPITULARE continuitate si derivabilitate - 20 MARTIE 2020

(subiecte selectate de prof. Gobej Adrian)

PROBLEMA NR. 1

Să se calculeze $f'(1)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

a) 2; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) -3.

PROBLEMA NR. 2 (TOP!!!)

Să se determine mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $\ln(1+2x)-x^2=a$ să aibă o singură soluţie strict negativă. **(6 pct.)**

a) $a\in(-e,\ e)$; b) $a\in(0,\ \ln 2)$; c) $a\in(-1,\ \ln 2)$; d) $a\in(-\infty,\ 0)$; e) $a\in\left(0,\ \ln 2-\frac{1}{4}\right)$; f) $a\in\left(\frac{1}{2}\ ,\ \ln 3\right)$.

PROBLEMA NR. 3

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x\,(1-x)^2}$. Să se determine suma absciselor punctelor de extrem local. **(6 pct.)**

a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{1}{6}$.

PROBLEMA NR. 4 (TOP!!!)

Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f astfel încât $F(1)=0$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$. **(6 pct.)**

a) $\frac{1}{4}\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$; c) $\frac{1}{4}\ln 5$; d) $\frac{1}{3}\ln 3$; e) $\frac{1}{5}\ln 2$; f) $\frac{1}{3}\ln 7$.

PROBLEMA NR. 5

Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln x$. **(6 pct.)**

a) $x=\sqrt{2}$; b) $x=\frac{e}{2}$; c) $x=2$; d) $x=3$; e) $x=1$; f) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PROBLEMA NR. 6

Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=(X-1)^{2017}+(X-3)^{2016}+X^2+X+1$ şi $g=X^2-4X+4$. Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g. **(6 pct.)**

a) $6X+1$; b) $X-1$; c) $6X-3$; d) $2X+1$; e) $2X-3$; f) $X+1$.

PROBLEMA NR. 7

Determinaţi abscisele punctelor de extrem pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$. **(6 pct.)**

a) $x\in\{-1,1\}$; b) $x\in\{-3,0\}$; c) $x\in\{0,4\}$; d) $x=5$; e) $x\in\{-2,1\}$; f) $x\in\{2,3\}$.

PROBLEMA NR. 8 (TOP!!!)

Considerăm funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, dacă $x\in(-1,1]$, şi $f(-1)=-\frac{\pi}{2}$. Fie $M=\{m\in\mathbb{R}\mid \text{ecuaţia } f(x)=mx \text{ are trei soluţii reale şi distincte}\}$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $M=\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$; b) $M=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$; c) $M=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$;d) $M=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$; e) $M=\left[1,\frac{\pi}{4}\right)$; f) $M=\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$.

PROBLEMA NR. 9 (TOP!!!)

Fie numerele $a = 2016^{\sqrt{2014}}$, $b = 2015^{\sqrt{2015}}$, $c = 2014^{\sqrt{2016}}$. Care afirmaţie este adevărată? **(6 pct.)**

a) $c > a > b$; b) $b > a > c$; c) $c > b > a$; d) $a > c > b$; e) $a > b > c$; f) $b > c > a$.

PROBLEMA NR. 10

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+10}{x^2+x+1}$. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei f. **(6 pct.)**

a) 3; b) 6; c) 11; d) 7; e) 9; f) 4.

PROBLEMA NR. 11

Notăm cu α partea reală a unei rădăcini din $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ a polinomului $f = X^3 - X^2 - X - 1$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$; b) $\alpha \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{4})$; c) $\alpha \in (-2, -1)$; d) $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$; e) $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$; f) $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

PROBLEMA NR. 12

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \le 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie continuă. **(5 pct.)**

a) $m = 2$; b) $m = \frac{1}{3}$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = -2$; e) $m = 4$; f) $m = -5$.

PROBLEMA NR. 13

Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{e}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

PROBLEMA NR. 14

Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$. Abscisa punctului de extrem al funcţiei f este: **(5 pct.)**

a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{1}{e^2}$; c) $x = e$; d) $x = e^2$; e) $x = \frac{1}{e}$; f) $x = 1$.

PROBLEMA NR. 15

Să se calculeze $\ell = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx$. **(5 pct.)**

a) $\ell = 1$; b) $\ell = 1 + \ln 2$; c) $\ell = \frac{1}{4}$; d) $\ell = 3 \ln 2$; e) $\ell = \frac{11}{4}$; f) $\ell = \ln \sqrt{2}$.

Mult spor!

BAREME ȘI REZOLVARI DETALIATE

BAREM PROBLEMA NR. 1 (RASPUNS E)

Soluţie. Avem $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$. Deci $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

BAREM PROBLEMA NR. 2 (RASPUNS D)

Soluţie. Din condiţiile de existenţă pentru logaritm, obţinem $1+2x>0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Studiem funcţia $f(x) = \ln(1+2x) - x^2$, $f: (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2x = \frac{-2(2x^2+x-1)}{2x+1}$ şi se observă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$, convenind doar soluţia $\frac{1}{2} \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. De asemenea, se observă că $f(\frac{1}{2}) = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ şi

$$\lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} \ln(1+2x) - x^2 = -\infty - \frac{1}{4} = -\infty.$$

Pe de altă parte,

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2} - 1\right)$$

şi folosind pentru fracţie regula lui l'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{2/(1+2x)}{2x} - 1\right) = -1,$$

rezultă $L = \infty \cdot (-1) = -\infty$. Pe baza acestor rezultate, putem construi tabelul de variaţie al funcţiei f,

x	—	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
$f(x)$	—	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2 - \frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$	—	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Se observă că $\ln 2 - \frac{1}{4} > 0$ (inegalitatea revine, în urma exponenţierii la $16 > e$, adevărat), deci punctul de maxim al funcţiei f se află deasupra axei Ox. Folosind graficul funcţiei f, examinăm ecuaţia $f(x) = a$. Distingem următoarele trei cazuri: (i) pentru $a > \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta $y = a$ nu intersectează graficul funcţiei f deci a nu întruneşte condiţia impusă de definiţia mulţimii M; (ii) pentru $a = \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta intersectează graficul într-un punct dublu de abscisă nenegativă $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, deci $a \notin M$; (iii) pentru $a \in (0, \ln 2 - \frac{1}{4})$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise strict pozitive $x_{1,2} > 0$, deci $a \notin M$; (iv) pentru $a = 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 = 0$ respectiv $x_2 > 0$, deci $a \notin M$; (v) pentru $a < 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, respectiv $x_2 > 0$, deci $a \in M$, singurul caz favorabil. În concluzie, $M = (-\infty, 0)$. d

BAREM PROBLEMA NR. 3 (RASPUNS C)

Soluţie. Prin derivare obţinem

$$f'(x) = \frac{3x^2-4x+1}{3[x(x-1)^2]^{2/3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9x[x(x-1)^2]^{2/3}}.$$

Se observă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ şi că $f''(\frac{1}{3}) < 0$, deci f este concavă în $x = \frac{1}{3}$, deci $x = \frac{1}{3}$ este abscisă de punct de maxim local pentru f. Pe de altă parte în $x = 1$, f are un punct de întoarcere, fiind strict descrescătoare la stânga şi strict crescătoare la dreapta, deci f are în $x = 1$ un punct de minim local. Prin urmare suma absciselor punctelor de extrem local este $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$. c

BAREM PROBLEMA NR. 4 (RASPUNS A)

Soluţie. Integrând prin părţi şi ţinând cont că $x > 0$, obţinem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\cdot \ln x dx = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\cdot \ln x dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot \ln x - \int\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot \ln x - \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot \ln x - \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C = \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Condiţia $F(1) = 0$ conduce la $C = \frac{\ln 2}{4}$. Atunci $F(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{4}$. Regrupând termenii şi aplicând regula lui l'Hospital, obţinem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} F(x) &= -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} + \frac{\ln 2}{4} \\ &= -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} - \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} + \frac{\ln 2}{4} = -\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\ln 1 + \frac{\ln 2}{4}, \end{aligned}$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \frac{1}{4}\ln 2$. ⓐ

BAREM PROBLEMA NR. 5 (RASPUNS F)

Soluţie. Punctele de extrem sunt puncte ctitice ale lui f, deci puncte ale căror abscisă anulează derivata funcţiei f. Dar $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Dar singura valoare care aparţine domeniului de definiţie $(0,\infty)$ este $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Deoarece $f''(x_*) = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\big|_{x=\sqrt{2}/2} = 4 \neq 0$, rezultă că $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de extrem (mai exact, dat fiind că $f''(x_*) > 0$, punct de minim) pentru funcţia f. ⓕ

BAREM PROBLEMA NR. 6 (RASPUNS C)

Soluţie. Folosind împărţirea cu rest a polinomului f la g, se observă că deoarece gradul împărţitorului g este 2, rezultă că restul are cel mult gradul întâi, deci este de forma $R(x) = ax + b$. Prin urmare avem:

$$P(x) = g(x)\cdot h(x) + R(x). \tag{1}$$

Derivând această egalitate, obţinem

$$P'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) + R'(x). \tag{2}$$

Înlocuind expresia din enunţ a polinomului f, relaţiile (1) şi (2) conduc la sistemul

$$\begin{cases} (x-1)^{2017} + (x-3)^{2016} + x^2 + x + 1 &= g(x)\cdot h(x) + ax + b \\ 2017\cdot(x-1)^{2016} + 2016\cdot(x-3)^{2015} + 2x + 1 &= g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) + a. \end{cases}$$

Înlocuind $x = 2$ şi folosind faptul că această valoare este rădăcină dublă pentru g (deci $g(2) = g'(2) = 0$), sistemul devine

$$\begin{cases} 1^{2017} + (-1)^{2016} + 2^2 + 2 + 1 &= g(2)\cdot h(2) + 2a + b \\ 2017\cdot 1^{2016} + 2016\cdot(-1)^{2015} + 2\cdot 2 + 1 &= g'(2)\cdot h(2) + g(2)\cdot h'(2) + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 9 \\ a = 6, \end{cases}$$

deci $a = 6$ şi $b = -3$. Prin urmare restul căutat este $R = aX + b = 6X - 3$. ⓒ

BAREM PROBLEMA NR. 7 (RASPUNS A)

Soluţie. Pentru $f(x) = x^3 - 3x + 1$ extremele locale (dacă există) sunt conform Teoremei Fermat, printre rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Aceasta se rescrie: $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Dar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty > 0$, deci f creşte, scade şi apoi creşte respectiv pe intervalele $(-\infty, -1)$, $[-1, 1]$ şi $(1, \infty)$. Rezultă că $x = -1$ este abscisă de maxim local, iar $x = 1$ este abscisă de minim local pentru f. Prin urmare abscisele căutate sunt $\{-1, 1\}$.

BAREM PROBLEMA NR. 8 (RASPUNS F)

Soluţie. Discutăm ecuaţia $f(x) = mx$, pentru $x \in [-1, 1]$. Se observă că $x = 0$ satisface ecauţia. Pentru $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ căutăm $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are două soluţii distincte. Deoarece $x \neq 0$, împărţind prin x, ecuaţia se rescrie $h(x) = 0$, unde

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} - m = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - m.$$

Se verifică uşor că are loc tabelul de variaţie:

x	-1			0			1
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$\frac{\pi}{2} - m$	$\searrow$	$1-m$	$\vert$	$1-m$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - m$

Dorim ca ecuaţia $h(x) = 0$ să aibă soluţii în fiecare din intervalele $x \in [-1, 0)$ şi $x \in [-1, 0)$, ceea ce revine la $0 \in (1-m, \frac{\pi}{2} - m]$, adică $1 - m < 0 \leq \frac{\pi}{2} - m$, de unde obţinem $m \in (1, \frac{\pi}{2}]$. ⓕ

Notă. Soluţia se simplifică semnificativ, dacă observăm că $f(x) = \arcsin x$, $\forall x \in [-1, 1]$. Pentru a arăta acest lucru, constatăm că pentru $x \in (-1, 1]$, notând $\alpha = f(x)$, rezultă $\operatorname{tg}(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, deci $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; apoi notând $\sin t = x$ rezultă $f(x) = t$, deci $f(x) = \arcsin x$ pentru $x \in (-1, 1]$. Egalitatea are loc pe întregul interval $[-1, 1]$ deoarece $f(x)$ şi $\arcsin x$ sunt continue pe $[-1, 1]$, derivabile cu aceeaşi derivată $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe $(-1, 1)$ şi coincid la capetele intervalului $[-1, 1]$.

BAREM PROBLEMA NR. 9 (RASPUNS C)

Soluţie. Funcţia $f(x) = \sqrt{x+1}\ln(x-1) - \sqrt{x}\ln x$, $\forall x \in [2, \infty)$ admite un maxim local strict pozitiv într-un punct de abscisă $x_1 \in (62, 63)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $[x_1, \infty)$, deci este şi strict pozitivă pe acest interval; prin urmare, aplicând funcţia exponenţială, rezultă $f(2015) > 0 \Leftrightarrow 2014^{\sqrt{2016}} > 2015^{\sqrt{2015}}$, deci $c > b$. Funcţia $g(x) = \sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x-1}\ln(x+1)$, $\forall x \in [2, \infty)$ admite un maxim local strict pozitiv într-un punct de abscisă $x_2 \in (45, 46)$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $[x_2, \infty)$, deci este şi strict pozitivă pe acest interval; prin urmare $g(2015) > 0 \Leftrightarrow 2015^{\sqrt{2015}} > 2016^{\sqrt{2014}}$, deci $b > a$. În concluzie, $c > b > a$.

BAREM PROBLEMA NR. 10 (RASPUNS B)

Soluţie. ***Metoda 1.*** Pentru $t = \frac{x^2+x+1}{3}$ observăm că $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci t este strict pozitiv. Atunci $f(x) = g(t) = 3(t+\frac{1}{t})$, iar $g'(t) = 3\frac{t^2-1}{t^2}$. Pentru $t > 0$, funcţia g are un minim local în punctul de abscisă $t = 1$, anume $g(1) = 3 \cdot 2 = 6$. Abscisa x corespunzătoare lui $t = 1$ rezultă din ecuaţia $\frac{x^2+x+1}{3} = 1$, care are soluţiile $x \in \{-2, 1\}$. ***Metoda 2.*** Observăm că $f(x) = x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}$. Atunci $f'(x) = (2x+1)\left(1-\frac{9}{(x^2+x+1)^2}\right)$. Aceasta se anulează în $x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$. Studiem variaţia funcţiei f şi obţinem că punctele de minim ale lui f se află în punctele de abcisă $x \in \{-2, 1\}$, iar valoarea minimă corespunzătoare este $f(-2) = f(1) = 6$. ***Metoda 3.*** Pentru $t = \frac{x^2+x+1}{3}$ observăm că $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci t este strict pozitiv. Atunci se poate aplica inegalitatea mediilor, $f(x) = 3(t+\frac{1}{t}) \geq 3 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1$, iar f îşi atinge minimul pentru $t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$.

BAREM PROBLEMA NR. 11 (RASPUNS F)

Soluţie. Pentru studiul rădăcinilor reale ale lui f cu şirul lui Rolle, se observă că derivata $f'(x) = 3x^2-2x-1$ se anulează în punctele $x \in \{-\frac{1}{3}, 1\}$ şi avem: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$, $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{22}{27} < 0$, $f(1) = -2 < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty > 0$, deci f schimbă semnul în intervlul $(1, \infty)$. De asemenea, $f(2) = 1 > 0$, deci unica rădăcină reală $x_1 = a \in \mathbb{R}$ a funcţiei f se află în intervalul $(1, 2)$. Dacă $x_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ $(d \neq 0)$ sunt cele două rădăcini complexe conjugate ale lui f, din prima relaţie Viete se obţine $a + 2\alpha = 1$, unde $a \in (1, 2)$; înlocuind $a = 1 - 2\alpha$ în inegalităţile $1 < a < 2$, rezultă $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, deci $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

BAREM PROBLEMA NR. 12 (RASPUNS A)

Soluţie. Continuitatea funcţiei f în $x = 1$ revine la satisfacerea condiţiilor $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) = \lim_{x\searrow 1} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 1}(x^2+m) = 1+m = \lim_{x\searrow 1}(2x+1) \Leftrightarrow m+1 = m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

BAREM PROBLEMA NR. 13 (RASPUNS D)

Soluţie. Prin derivare, obţinem: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$. Atunci (ţinând cont că $x > 0$), $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Examinând semnul polinoamelor care formează fracţia $f'(x)$, se observă că:

* $f'(x) < 0$ (deci f este descrescătoare) pentru $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

* $f'(x) > 0$ (deci f este crescătoare) pentru $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.

Prin urmare $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ este punct de minim pentru f.

BAREM PROBLEMA NR. 14 (RASPUNS F)

Soluţie. Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci extremele acesteia sunt printre punctele de anulare a derivatei. Dar $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}$, iar $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tabelul de variatie al funcţiei f este

x	0		1		∞
$f'(x)$	$\vert$	$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

deci punctul $(1, -1)$ este singurul punct de extrem al funcţiei f (punct de maxim), iar abscisa acestuia este $x = 1$.

BAREM PROBLEMA NR. 15 (RASPUNS F)

Soluţie. Se observă că ridicarea la pătrat $\varphi : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $\varphi(x) = x^2$ este bijecţie şi că avem $\varphi(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Putem folosi prin urmare schimbarea de variabilă $u = x^2$. Integrala se rescrie succesiv

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx &= \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x}{x^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u(u+1)}du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t^2}{t^2+1} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Atunci

$$\ell = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}.$$

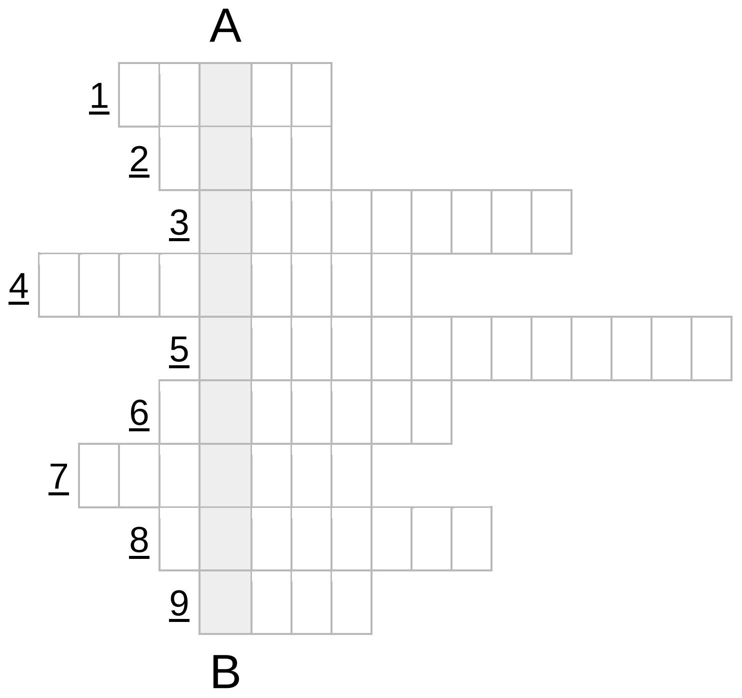
TEST BAC rebus !!!(sic !)

Un test de BAC. pentru pregătirea examenului de bacalaureat,clasa a XII-a,M1 și M2

Simularea examenului de bacalaureat presupune rezolvarea unui.....TEST DE BAC.

Afișați rezolvarea

Rezolvati rebus



1. numărul elementelor inversabile în clasa de resturi modulo 8 este......
2. numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este.....
3. a rezolva o ecuație înseamnă a determina.....
4. Intervalul pe care o funcție este crescătoare,se numește interval de....
5. O matice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă.....este nenul
6. Pentru a determina un termen în binomul lui Newton,sciem termenul.....
7. orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui....
8. Coeficienții necunoscutelor,într-un sistem,formează......sistemului
9. Inelul cu toate elementele,diferite de zero,inversabile formează structura algebrică de....

Salutari si mult spor!
Profu' de mate!