FIȘĂ RECAPITULARE limite - 20 MARTIE 2020

(subiecte selectate de prof. Gobej Adrian)

PROBLEMA NR. 1

Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+1}{10^k}$.

a) $L=\infty$; b) $L=\frac{10}{9}$; c) $L=\frac{10}{81}$; d) $L=\frac{1000}{9}$; e) $L=\frac{100}{81}$; f) $L=\frac{9}{10}$.

PROBLEMA NR. 2

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

a) -4; b) 2; c) 3; d) ∞; e) 0; f) 1.

PROBLEMA NR. 3

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

a) ∞; b) -2; c) 2; d) $-\infty$; e) nu există; f) 0.

PROBLEMA NR. 4

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right).$$

a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{3}$.

PROBLEMA NR. 5

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

PROBLEMA NR. 6 (GREA!!!)

Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\searrow 0} f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{e^2+1}{e}$; f) nu există.

PROBLEMA NR. 7 (GREA!!!)

Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Decideţi dacă:

a) $N=0$; b) $N=3$; c) ecuaţia are numai soluţii întregi; d) $N=4$; e) $N=1$; f) $N=2$.

PROBLEMA NR. 8

Să se găsească $\mathbf{l} = \lim_{n\to\infty}\left(n+2-\sqrt{n^2+n+3}\right)$.

a) $\mathbf{l} = -1$; b) nu există; c) $\mathbf{l} = \frac{3}{2}$; d) $\mathbf{l} = \infty$; e) $\mathbf{l} = 0$; f) $\mathbf{l} = 1$.

PROBLEMA NR. 9

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x > 0 \\ ax+b, & x \le 0 \end{cases}$ este continuă, dacă

a) $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$; b) $a = -1$, $b = 2$; c) $a = 1$, $b = 2$; d) $a = 1$, $b > 1$;
e) $a = b = -1$; f) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$.

PROBLEMA NR. 10

Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 + x^2\cos x}$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) limita nu există; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

PROBLEMA NR. 11

Să se calculeze $L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

a) $L = -1$; b) $L = 1$; c) $L = \infty$; d) $L = 2$; e) $L = 0$; f) nu există.

PROBLEMA NR. 12

Să se calculeze limita $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

a) $L = \frac{2}{3}$; b) $L = \frac{4}{9}$; c) $L = \infty$; d) nu există; e) $L = -1$; f) $L = 0$.

PROBLEMA NR. 13

Să se calculeze $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **(4 pct.)**

a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

PROBLEMA NR. 14

Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2-1}{x}$. **(6 pct.)**

a) ∞; b) 2; c) 1; d) nu există; e) -2; f) $-\infty$.

PROBLEMA NR. 15

Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^x t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot \sin t\, dt$. **(8 pct.)**

a) 0; b) ∞ ; c) $\frac{1}{4}$; d) 1; e) $\frac{1}{e}$; f) $\frac{\sin 1}{e}$.

BAREME ȘI REZOLVARI DETALIATE

BAREM PROBLEMA NR. 1 (RASPUNS E)

Soluţie. Avem $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(\frac{1}{10})^k$. Fie $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$. Pentru $x \neq 1$ avem suma unei progresii geometrice de raţie x deci $f(x) = \frac{x^{n+2}-x}{x-1}$. Derivând obţinem $f'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$. Pentru $x = \frac{1}{10}$, rezultă $S_n = \frac{\frac{n+1}{10^{n+2}} - \frac{n+2}{10^{n+1}} + 1}{(\frac{9}{10})^2}$. Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10^{n+2}} = 0$, deducem $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{100}{81}$.

BAREM PROBLEMA NR. 2 (RASPUNS C)

Soluţie. Avem $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = 3$.

BAREM PROBLEMA NR. 3 (RASPUNS B)

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} = -2.$$

BAREM PROBLEMA NR. 4 (RASPUNS F)

Soluţie. Avem $\frac{k^2}{n^3+n^2} \leq \frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{k^2}{n^3+1}$ şi deci sumând pentru $k \in \{1, \cdots, n\}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{1}{3},$$

deci conform criteriului cleştelui, obţinem $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2} = \frac{1}{3}$.

BAREM PROBLEMA NR. 5 (RASPUNS C)

Soluţie. Avem $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{4}{5}$.

BAREM PROBLEMA NR. 6 (RASPUNS B)

Soluţie. Determinăm $\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n)}(x)$. Prin derivare, se observă că are loc egalitatea $4xf''(x)+2f'(x)=f(x)$, deci iterând obţinem $2f^{(n-1)}(x)+4[xf^{(n)}(x)+(n-2)f^{(n-1)}(x)]=f^{(n-2)}(x)$. Pentru $x\searrow 0$, aceasta conduce la $(4n-6)\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n-1)}(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n-2)}(x)$, de unde obţinem $\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$ şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n)}(x))=0$.

BAREM PROBLEMA NR. 7 (RASPUNS B)

Soluţie. Observam ca $x=0$ nu este solutie deci distingem cazurile $x<0$ şi $x>0$.

1. Considerăm mai intâi $x<0$. Notăm $y=-x>0$ şi deci $1=y^2 2^y$. Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(y)=y^2\cdot 2^y-1$ este strict crescătoare ca produs a două funcţii strict crescătoare minus o funcţie constantă şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x\searrow 0} f(0)=-1<0$ şi $f(1)=1>0$, rezultă f are soluţie unică, $y_1\in(0,1)$. Deci ecuaţia dată are o singură soluţie în intervalul $(-\infty,0)$, $x_1=-y_1<0$.

2. Pentru $x>0$, Se observă că ecuaţia admite soluţiile $x_2=2$ şi $x_3=4$. Verificăm că acestea sunt singurele soluţii strict pozitive. Ecuaţia se rescrie $x\ln 2=2\ln x$. Fie $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x\ln 2-2\ln x$, deci $g'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}$. Avem $g'(x_0)=0\Rightarrow x_0=\frac{2}{\ln 2}$. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, iar $g(2)=0, g(4)=0$. Dar $x_0\in(2,4)$ este singura radacină a derivatei g', deci, folosind şirul lui Rolle, se deduce că $x_2=2$ şi $x_3=4$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei $g(x)=0$ în intervalul $(0,+\infty)$. Concluzionăm că ecuaţia $2^x=x^2$ are 3 rădăcini reale, $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2=2$ şi $x_3=4$.

BAREM PROBLEMA NR. 8 (RASPUNS C)

Soluţie. Raţionalizând, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n^2+n+3)}{n+2+\sqrt{n^2+n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2+\sqrt{n^2+n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}=\frac{3}{2}.$$

BAREM PROBLEMA NR. 9 (RASPUNS F)

Soluţie. Cum f este continuă pe $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ este suficient să punem condiţiile pentru continuitate în 0, adică

$$\lim_{x\searrow 0}(x^2+x+1)=\lim_{x\nearrow 0}(ax+b)=f(0)\Rightarrow\begin{cases} b=1\\ a\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

BAREM PROBLEMA NR. 10 (RASPUNS E)

Soluţie. Avem $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

BAREM PROBLEMA NR. 11 (RASPUNS E)

$$L=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$$

BAREM PROBLEMA NR. 12 (RASPUNS B)

Avem

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

BAREM PROBLEMA NR. 13 (RASPUNS B)

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

BAREM PROBLEMA NR. 14 (RASPUNS E)

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-1)^2-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(x-2) = -2.$

BAREM PROBLEMA NR. 15 (RASPUNS C)

Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin t dt}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 e^{-x^2} \sin x}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}.$

MESAJ :

Salutari si mult spor!

Profu' de mate!