FIȘĂ RECAPITULARE PRIMITIVE - 20 MARTIE 2020
(subiecte selectate de prof. Gobej Adrian)

PROBLEMA NR. 1

Să se calculeze $\ell = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

a) $\ell = 2$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) limita nu există; e) $\ell = 0$; f) $\ell = -3$.

PROBLEMA NR. 2

Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le xe^{x+1}\}.$$

a) $\ln 2$; b) e^2; c) $2e$; d) $e+1$; e) e; f) $2\ln 2$.

PROBLEMA NR. 3

Să se calculeze integrala $\int_3^{19} \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x$.

a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{19}{2}$; c) $\frac{39}{2}$; d) $\frac{18}{5}$; e) $\frac{36}{5}$; f) $\frac{38}{5}$.

PROBLEMA NR. 4

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2}\ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

PROBLEMA NR. 5

Să se determine m real dacă $m \cdot \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2+\ln x}dx = 1$.

a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln\frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

PROBLEMA NR. 6

Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei
$\int_{-1}^{1} (x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ pentru a, b reale.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

PROBLEMA NR. 7

Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\ \mathrm{d}t$.

a) 14; b) ∞; c) 10; d) 20; e) 18; f) 0.

PROBLEMA NR. 8

Primitivele $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ sunt

a) $x+\operatorname{tg} x+C$; b) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$; c) $x+\operatorname{ctg} x+C$; d) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+C$; e) $\frac{1}{\cos^2 x}+C$; f) $\frac{1}{\sin^2 x}+C$.

PROBLEMA NR. 9

Să se calculeze $I=\int_0^1 xe^x\, dx$.

a) $I=e$; b) $I=-1$; c) $I=1$; d) $I=0$; e) $I=2e$; f) $I=-e$.

PROBLEMA NR. 10

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$. **(4 pct.)**

a) $2\ln 2$; b) $\frac{\ln 3}{4}$; c) $\frac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\frac{\ln 2}{3}$.

PROBLEMA NR. 11

Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_x^{x+1}\frac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0)=0$; f) f este convexă.

PROBLEMA NR. 12

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^2\cdot e^{-t^2}\cdot \sin t\, dt$. **(8 pct.)**

a) 0; b) ∞ ; c) $\frac{1}{4}$; d) 1; e) $\frac{1}{e}$; f) $\frac{\sin 1}{e}$.

PROBLEMA NR. 13

Să se calculeze aria mărginită de dreptele $x=0$, $x=1$, axa Ox şi de graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

a) $2\ln 2$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 2$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

PROBLEMA NR. 14

Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+5x}{x^2+1}$. Să se calculeze $I=\int_0^3 f^{-1}(t)\,dt$, unde f^{-1} este inversa funcţiei bijective f. **(4 pct.)**

a) $\frac{1}{2}(5-4\ln 2)$; b) $\frac{3+4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5+4\ln 2)$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{2}(2+\ln 2)$; f) $\frac{1}{2}(5-\ln 2)$.

PROBLEMA NR. 15

Să se calculeze aria mărginită de parabola $y=2x-x^2$ şi axa Ox. **(4 pct.)**

a) 2; b) 3; c) $-\frac{4}{3}$; d) -1; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

BAREME ȘI REZOLVARI DETALIATE

BAREM PROBLEMA NR. 1 (RASPUNS A)

Soluţie. Fie $I_n = \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}dx$, pentru $n \geq 2$ avem

$$I_n = \int_0^2 \frac{n-x}{n+x}dx = \int_0^2 \left(\frac{2n}{x+n} - 1\right) dx = 2n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - 2 = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} - 2 = 4\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} - 2.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 4\ln e - 2 = 4 - 2 = 2.$

BAREM PROBLEMA NR. 2 (RASPUNS E)

Folosind integrarea prin părţi rezultă aria

$$A = \int_0^1 xe^{x+1}dx = xe^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e^2 + e = e.$$

BAREM PROBLEMA NR. 3 (RASPUNS A)

Soluţie. Din condiţia de existenţă a radicalului $\sqrt{x-3}$, avem $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$. Cum $x \in [3, 19]$, această condiţie este satisfăcută. Se observă că

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = \sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2} = |\sqrt{x-3}-3| = \begin{cases} 3-\sqrt{x-3}, & x \in [3,12] \\ \sqrt{x-3}-3, & x \in [12,19]. \end{cases}$$

Atunci

$$I = \int_3^{19} \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ dx = \int_3^{12}(3-\sqrt{x-3})dx + \int_{12}^{19}(\sqrt{x-3}-3)dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $y = \sqrt{x-3}$, deci $x = y^2+3$, $dx = 2ydy$ şi $x = 3 \Rightarrow y = 0$, $x = 12 \Rightarrow y = 3$, $x = 19 \Rightarrow y = 4$. Rezultă

$$I = \int_0^3 (3-y)2ydy + \int_3^4 (y-3)2ydy = \left(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{2}{3}y^3 - 3y^2\right)\Big|_3^4 = \frac{38}{3}.$$

BAREM PROBLEMA NR. 4 (RASPUNS D)

Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

BAREM PROBLEMA NR. 5 (RASPUNS A)

Soluţie. Produsul din membrul stâng al relaţiei fiind nenul, rezultă în particular $m \neq 0$. De asemenea, varabila $x \in [1, \sqrt{2}]$ din integrala definită este strict pozitivă. Deoarece $e^{\ln x} = x$, folosind schimbarea de variabilă $y = mx^2$ (definită de o bijecţie pentru pentru $x > 0$), rezultă

$$I = m\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}xdx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}(mx^2)'dx = \frac{1}{2}e^{mx^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{2m} - e^m\right),$$

deci, ţinând cont de faptul că $e^m > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, obţinem

$$\frac{1}{2}(e^{2m} - e^m) = 1 \Leftrightarrow (e^m)^2 - e^m - 2 = 0 \Leftrightarrow e^m \in \{-1, 2\} \cap (0, \infty) = \{2\} \Leftrightarrow e^m = 2 \Leftrightarrow m = \ln 2.$$

BAREM PROBLEMA NR. 6 (RASPUNS A)

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}(x^4 - 2bx^3 + (b^2-2a)x^2 + 2abx + a^2)dx = \tfrac{2}{5} + \tfrac{2(b^2-2a)}{3} + 2a^2 = \\ &= 2a^2 - \tfrac{4a}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2b^2}{3} = 2\left(a - \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2b^2}{3} + \tfrac{8}{45} \geq \tfrac{8}{45}, \end{aligned}$$

şi deci minimul căutat este $\frac{8}{45}$.

BAREM PROBLEMA NR. 7 (RASPUNS E)

Soluţie. Funcţia continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t) = t\sqrt{t^3+9}$ admite primitive F. Deci $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{x+3}^{2x+3} f(t)dt = \lim_{x\to 0}\frac{F(2x+3)-F(x+3)}{x}$, deci folosind regula l'Hospital (cazul $0/0$), rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(2x+3)-f(x+3)}{1} = 2f(3) - f(3) = 3\sqrt{3^3+9} = 18.$$

BAREM PROBLEMA NR. 8 (RASPUNS B)

Soluţie. Folosind formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

BAREM PROBLEMA NR. 9 (RASPUNS C)

Calculăm $I = \int_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi $g'(x) = e^x, f(x) = x$, rezultă

$$I = e^x x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

BAREM PROBLEMA NR. 10 (RASPUNS F)

Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2.$

BAREM PROBLEMA NR. 11 (RASPUNS D)

Soluţie. Cum funcţia $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este continuă, aplicăm teorema de medie pe intervalul $[x, x+1]$ şi avem $f(x) = (x+1-x)f'(\theta_x)$ unde $\theta_x \in (x, x+1)$ şi deci $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\theta_x\to+\infty}\dfrac{\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^4+\theta_x^2+1}} = 1.$ Deci graficul funcţiei f admite asimptota orizontală $y = 1$.

BAREM PROBLEMA NR. 12 (RASPUNS C)

Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^2e^{-t^2}\sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2e^{-t^2}\sin tdt}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{-x^2}\sin x}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}e^{-x^2} = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}.$

BAREM PROBLEMA NR. 13 (RASPUNS F)

Soluţie. Aria este egală cu $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

BAREM PROBLEMA NR. 14 (RASPUNS A)

Soluţie. Dacă $f^{-1}(t) = x$, rezultă $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$, iar $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ şi $f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$, deci efectuând schimbarea de variabilă $x = f^{-1}(t)$, şi apoi integrând prin părţi, integrala se rescrie

$$I = \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x(x^2+1)+4x}{x^2+1}dx =$$

$$= 3 - \int_0^1 xdx - 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 3 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{5}{2} - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(5 - 4\ln 2).$$

BAREM PROBLEMA NR. 15 (RASPUNS E)

Soluţie. Aria se află între axa Ox şi arcul de parabolă aflat deasupra acestei axe, deci corespunzător valorilor $x \in [0,2]$. Obţinem aria $A = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

MESAJ :

Lumea nu se opreste cand vrem noi.
Nu se va opri niciodata la comanda.
Orice decizii am lua, oamenii se vor naste, se vor iubi si uri, vor imbatrani si vor muri exact la timpul prevazut.
Nimeni nu decide cand se naste, cand se imbolnaveste sau cand moare (cu ceva exceptii).
Oamenii se vor imbolnavi in continuare, oamenilor le va fi foame, le va fi sete, vor cauta si vor vrea prieteni, vor citi si vor merge la teatru.
Ce sa o mai lungim, vor vrea lucruri normale.
Oamenii vor face in continuare tot ceea ce trebuie sa faca.
Desigur ca unii oameni se pot opri cateva zile, dar lumea nu se poate opri.
Este utopic sa credem asa ceva si foarte probabil si nociv. Valorificați aceasta perioada și învățați cât se poate de mult!
Cu drag și multă considerație (pentru cei care facței ce spun eu ...)

Profu' de mate!