Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași
17 ianuarie 2020
CLASA a XII -a

Barem de corectare

Problema 1. Fie grupul finit $(G,\cdot)$ de ordin n impar. Să se arate că funcția $f:G\to G$ cu proprietatea $f(xyz)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z), \forall x,y,z\in G$ este morfism.

Soluție și barem:

Luăm $x=y=z=e$ și obținem $f^2(e)=e$ ……………………………………….……2p

Cum $f^n(e)=e$ și n impar, rezultă $f(e)=e$ ……………………………………2p

Pentru $z=e$ se obține $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, deci f este morfism……………….3p

Problema 2. Fie G o submulțime nevidă finită de numere complexe nenule. Se știe că înmulțirea este lege
de compoziție pe mulțimea G. Demonstrați ca orice element din G are modulul egal cu 1 și
$1\in G$.

Soluție și barem:

Dacă $z\in G \Rightarrow z^n\in G$ …………………………………………………..1p

Dacă $|z|>1$ vom avea că mulțimea G este infinită ……………………1p

Dacă $|z|<1$ vom avea ca mulțimea G este infinita …………………..1p

Fie $G=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ si $x\in G$. Avem $G=\{xx_1,xx_2,...,xx_n\}$. De aici deducem că $x=xx_k$ …….3p

Ținând cont că $x\neq 0 \Rightarrow x_k=1$……………………………………………1p

Problema 3. Fie funcţia $f_\alpha:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{\ln x}, x\neq 1\\ \alpha, x=1\end{cases}$. Determinaţi numărul real α, astfel încat funcţia f_α să admită primitive pe $(0,+\infty)$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție și barem:

Fie G o primitivă a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ **2p**

Notăm $F(x)=G(\ln x), x>0 \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x}g(\ln x)=f_0(x), \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, adică

F este o primitivă a lui f_0 .... **2p**

Dacă există $\alpha\neq 0$ astfel încât f_α să admită primitive, atunci $f_\alpha - f_0$ admite primitive.

Dar $(f_\alpha - f_0)(x)=\begin{cases}0, x\neq 1\\ \alpha, x=1\end{cases}$ nu admite primitive, absurd! **2p**

În concluzie, f admite primitive $\Leftrightarrow \alpha=0$ **1p**

Problema 4. a) Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int\frac{\cos(nx)}{\sin x}dx, n\geq 1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculaţi $J_n=\int\sin(nx)\cdot\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)dx, n\geq 1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție și barem:

a) $\cos nx=\cos[(n-2)x+2x]=\cos(n-2)x\cos 2x-\sin(n-2)x\sin 2x\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos nx=\cos(n-2)x\cdot(1-2\sin^2 x)-\sin(n-2)x\cdot 2\sin x\cos x$ **2p**

Obținem $I_n=I_{n-2}-2\int[\cos(n-2)x\sin x+\sin(n-2)x\cos x]dx=I_{n-2}-2\int\sin(n-1)xdx\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n=I_{n-2}+\frac{2}{n-1}\cos(n-1)x, \forall n\geq 3$, cu **2p**

$I_1=\ln(\sin x)+C, I_2=\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+C$ **1p**

b) $J_n=\int\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'dx=-\frac{1}{n}\cos nx\cdot\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{n}\int\frac{\cos nx}{\sin x}dx$ **1p**

$J_n=-\frac{1}{n}\cos nx\cdot\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{n}I_n, n\geq 2$ **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro