Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a XI-a
Barem de corectare

Problema 1.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Determinați numerele reale *a* și *b*, știind că $A^2 = aA + bI_3$.

b) Determinați numerele reale *x* și *y* astfel încât $A^{2020} + A^{2019} = xA + yI_3$.

Soluție și barem.

a) $a=1$ și $b=2$. **(3p)**

b) Conform punctului a), avem $A^2 + A = 2(A+I_3)$. Prin inducție, deducem de aici că $A^{n+1} + A^n = 2^n(A+I_3)$, pentru orice număr întreg pozitiv *n*. Deci, $x=y=2^{2019}$. **(4p)**

Problema 2.

a) Demonstrați că, oricare ar fi matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea:

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2.$$

b) Găsiți o matrice $B\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2=7I_2$.

c) Demonstrați că, dacă matricea $X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ are proprietatea $\det(X^2-7I_2)=0$, atunci $X^2=7I_2$.

Soluție și barem.

a) Egalitatea cerută se poate demonstra prin calcul. **(2p)**

b) Căutăm $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $a+d=0$ și $ad-bc=-7$. O soluție este $a=1$, $d=-1$, $b=2$ și $c=3$, deci $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. **(2p)**

c) Din relația $\det(X^2-7I_2)=0$, rezultă că $\det(X-\sqrt{7}I_2)\det(X+\sqrt{7}I_2)=0$, deci $\det(X-\sqrt{7}I_2)=0$ sau $\det(X+\sqrt{7}I_2)=0$. Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Se observă că

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$$\det\left(X \pm \sqrt{7} I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x \pm \sqrt{7} & y \\ z & t \pm \sqrt{7} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (xt - yz) \pm (x+t)\sqrt{7} = -7,$$

de unde, având în vedere că x, y, z și t sunt numere raționale, obținem $xt - yz = -7$ și $x + t = 0$, deci $X^2 = 7I_2$. **(3p)**

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(x_n - \frac{1}{2}\right)$.

Soluție și barem.

a) Deoarece $x_n \geq \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} = \frac{1}{2}$ și $x_n \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1} = \frac{n^2+n}{2(n^2+1)}$, pentru orice număr întreg pozitiv n, iar $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$. **(4p)**

b) Avem:

$$x_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{2}{n^2+2} - \frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n^2+n} - \frac{n}{n^2}\right) + \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{n^2+1} + \frac{2^2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2+n}\right) + \frac{1}{2n},$$

deci $n\left(x_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2+1} + \frac{2^2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2+n}\right) + \frac{1}{2} = -y_n + \frac{1}{2}$.

Deoarece $y_n \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n} = \frac{2n+1}{6n}$ și $y_n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)}$, pentru orice număr întreg pozitiv n, iar $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{6n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)} = \frac{1}{3}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{3}$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(x_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. **(3p)**

Problema 4.

Spunem că o funcție $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ are prorietatea (P) dacă f este crescătoare și $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1) - f(x)\right) = 0$.

a) Demonstrați că funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ are proprietatea (P).

b) Demonstrați că, dacă f este o funcție cu proprietatea (P), atunci

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+a)-f(x+b)\right)=0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a și b.

Soluție și barem.

a) Funcția f este crescătoare și $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$. **(3p)**

b) Fie f o funcție cu proprietatea (P) și n un număr natural. Atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+n)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+n)-f(x+n-1)+f(x+n-1)-f(x+n-2)+\ldots\right.$$
$$\left.+f(x+1)-f(x)\right)=0+0+\ldots+0=0.$$

Cum funcția f este crescătore, pentru orice număr real pozitiv a, are loc relația $f(x+[a])-f(x)\le f(x+a)-f(x)\le f(x+[a]+1)-f(x)$. De aici, având în vedere că $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+[a])-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+[a]+1)-f(x)\right)=0$, rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+a)-f(x)\right)=0.$$

Așadar, avem:

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+a)-f(x+b)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+a)-f(x)-\left(f(x+b)-f(x)\right)\right)=0$. **(4p)**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro