Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a X-a
Barem de corectare

Problema 1.

a) Să se arate că $E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ nu este număr întreg și să se calculeze $[E_n]$ $(partea\ \hat{\imath}ntreag$ă);

b) Să se studieze monotonia șirului $(E_n)_{n\geq 2}$.

Soluție și barem:

a) Din inegalitatea mediilor avem $E_n > 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ …………………..…………………...……. **1p**

$E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n < \log_n n^2 + \log_{n+1}(n+1) = 3$, deci $E_n \notin \mathbb{Z}$ și $[E_n] = 2$……..…………. **1p**

b) Arată că $\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2) \Leftrightarrow (\ln(n+1))^2 > \ln n \cdot \ln(n+2)$,

dar, $\ln n \cdot \ln(n+2) < \left(\frac{\ln n + \ln(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\ln\sqrt{n(n+2)}\right)^2 < (\ln(n+1))^2$……………..…….…………... **2p**

Arată că funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ este strict crescătoare……………..…………...…………..... **2p**

Finalizare, șirul $(E_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător………………………...…………………..…….……… **1p**

Problema 2.

Fie numerele complexe distincte a, b, c, d astfel încât $a + c = b + d$ și $a^2 + c^2 = 2bd$.

Să se arate că numerele date sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Soluție și barem:

Din $a + c = b + d$ rezultă că vârfurile asociate alcătuiesc un paralelogram …………...…………….….….. **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$a^2+c^2=2bd \iff a^2+(b+d-a)^2=2bd \iff (d-a)^2+(b-a)^2=0$ …………………………… **4p**

Deci $\frac{d-a}{b-a} \in \{\pm i\}$, deci *a*, *b*, *d* sunt afixele unui triunghi dreptunghic isoscel…………………………………… **2p**

Problema 3.

Fie a, b, c cele trei rădăcini complexe ale ecuației $x^3-1=0$ și $u,v,w\in\mathbb{C}$ astfel încât:

$$u(v+w)=a,\ v(u+w)=b,\ w(v+u)=c.$$

a) Determinați *u*, *v*, *w*.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $u^n+v^n+w^n=a^n+b^n+c^n$

Soluție și barem:

a) Avem: $\{a,b,c\}=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$, de unde $a+b+c=0$, iar $abc=1$. Din $uv+uw=a$, $uv+vw=b$, $vw+uw=c$ obținem: $uv=-c$, $uw=-b$, $vw=-a$; $(uvw)^2=-1\Rightarrow uvw=\pm i$, de unde: $u=\pm\frac{i}{a}$, $v=\pm\frac{i}{b}$, $w=\pm\frac{i}{c}$

…………………………………………………………………………………………………… **3p**

b) $u^n+v^n+w^n=(\pm i)^n\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right)=(\pm i)^n\left(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}\right).$

Căutăm $n\in\mathbb{N}$ pentru care: $(\pm i)^n\left(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}\right)=1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}$.

Dacă $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci: $1+\varepsilon^{3k}+\varepsilon^{6k}=3$ și $(\pm i)^{3k}=1\Rightarrow k=4p\Rightarrow n=12p,\ p\in\mathbb{N}$.

Dacă $n=3k+1$, $k\in\mathbb{N}$, atunci: $1+\varepsilon^{3k+1}+\varepsilon^{6k+2}=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, relația este adevărată.

Dacă $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$, atunci: $1+\varepsilon^{3k+2}+\varepsilon^{6k+4}=1+\varepsilon^2+\varepsilon=0$, relația este adevărată.

Astfel, $n\in\{3k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{3k+2 \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{12k \mid k\in\mathbb{N}\}$ …………………………………………… **4p**

Problema 4.

Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,1)$, atunci:

a) $\log_a\frac{2bc}{b+c}\cdot\log_b\frac{2ca}{c+a}\cdot\log_c\frac{2ab}{a+b}\geq 1$

b) $\frac{1}{2+\log_a b}+\frac{1}{2+\log_b c}+\frac{1}{2+\log_c a}\leq 1.$

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție și barem:

a) $\frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{bc} \Rightarrow \log_a \frac{2bc}{b+c} \geq \log_a\left(\sqrt{bc}\right)$ …………………………………..……………………….. **1p**

$\log_a \frac{2bc}{b+c} \geq \frac{1}{2}\cdot\left(\log_a b + \log_a c\right) \geq \sqrt{\log_a b \cdot \log_a c}$ ……………………………………………………..……….. **1p**

Scriind încă două relații analoage, prin înmulțirea lor rezultă concluzia……………………………...…... **1p**

b) Notăm $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z,\ \ x\cdot y\cdot z = 1$**,** iar inegalitatea devine

$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} \leq 1$, sau $\frac{x}{2+x}+\frac{y}{2+y}+\frac{z}{2+z} \geq 1$ ……………………………..…………………..… **1p**

Fie $x=\frac{u}{v}, y=\frac{v}{t}, z=\frac{t}{u}$, deci rămâne de arătat că: $\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} \geq 1$

$$\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} = \frac{u^2}{2uv+u^2}+\frac{v^2}{2vt+v^2}+\frac{t^2}{2ut+t^2} \geq \frac{\left(u+v+t\right)^2}{u^2+v^2+t^2+2uv+2vt+2tu},$$

conform inegalității lui Cauchy, forma Titu Andreescu.

Deci $\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} \geq 1$,ceea ce trebuia demonstrat ……………………….……………………... **3p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro