Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a IX-a
Barem de corectare

**Problema 1. Fie șirul** $(a_n)_{n\geq 1}$**, dat prin** $\frac{a_1}{0!}+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+...+\frac{a_n}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n\in\mathbb{N}^*$**, unde** $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, **iar** $0!=1$.

**a) Determinați termenul general** $a_n$.

**b) Demonstrați că** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$.

***Soluție și barem:***

a) $a_n=(n+1)!, \forall n\in\mathbb{N}^*$ ............................................................ 3p

b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{(n+1)!}$

$\frac{1}{2!}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\vdots$

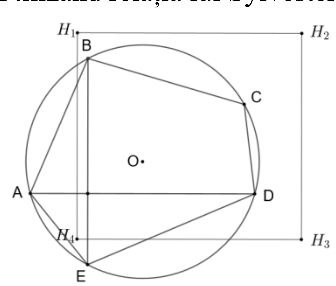
$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n+1)}<\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ............................................................ 3p

Prin adunare se obține $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{(n+1)!}\leq 1-\frac{1}{n+1}<1$ ............................................................ 1p

**Problema 2. Se consideră pentagonul** *ABCDE* **înscris în cercul de centru** *O* **cu** $AD\perp BE$ **. Dacă** $H_1, H_2, H_3, H_4$ **sunt ortocentrele triunghiurilor** *ABC*, *BCD*, *CDE*, **respectiv** *ACE*, **arătați că** $H_1H_2H_3H_4$ **este dreptunghi.**

***Soluție și barem:***

Utilizând relația lui Sylvester în triunghiurile *ABC*, *BCD*, *CDE*, respectiv *ACE*,





Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

se obțin egalitățile $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{H_4H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_4}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{array}\right\}$

Deoarece $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_4H_3}\Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram........ 5p

$\overrightarrow{H_1H_4}=\overrightarrow{OH_4}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BE}$,

dar $AD\perp BE\Rightarrow H_1H_2\perp H_1H_4\Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ dreptunghi........ 2p

**Problema 3. Determinați $x\in\mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{3}\right\}+\left\{x+\frac{2}{3}\right\}=[x]^2$, unde $\{y\}$ reprezintă partea fracționară, iar $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *y*.**

***Soluție și barem:***

Înlocuind în relația din enunț partea fracționară obținem

$$x-[x]+x+\frac{1}{3}-\left[x+\frac{1}{3}\right]+x+\frac{2}{3}-\left[x+\frac{2}{3}\right]=[x]^2\Leftrightarrow 3x+1=[x]^2+[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]$$

Din identitatea lui Hermite $\left([x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]\right)$, avem $3x+1=[x]^2+[3x]=k\in\mathbb{Z}$

Deoarece $x=\frac{k-1}{3}$, ecuația devine $k=\left[\frac{k-1}{3}\right]^2+k-1\Leftrightarrow\left[\frac{k-1}{3}\right]^2=1$........ 3p

Dacă $\left[\frac{k-1}{3}\right]=1\Leftrightarrow\frac{k-1}{3}\in[1,2)\Leftrightarrow k\in[4,7)$, dar $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{4,5,6\}\Rightarrow x\in\left\{1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right\}$........ 2p

Dacă $\left[\frac{k-1}{3}\right]=-1\Leftrightarrow\frac{k-1}{3}\in[-1,0)\Leftrightarrow k\in[-2,1)$, dar $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{-2,-1,0\}\Rightarrow x\in\left\{-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\}$........ 2p

**Problema 4.** Se consideră numerele reale pozitive $a,\ b,\ c$ care verifică relația $ab+ac+bc=abc$.

a) Demonstrați că $a+b+c\geq 9$.

b) Demonstrați că $(a+b+c)\sqrt{9+a+b+c}\geq 3\sqrt{6abc}$.

***Soluție și barem:***

a) Din inegalitatea mediilor $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\Rightarrow a+b+c\geq\frac{9abc}{ab+ac+bc}\Leftrightarrow a+b+c\geq 9$........ 3p

b) $\left.\begin{array}{l}(a+b+c)^2\cdot(9+a+b+c)\geq(a+b+c)^2\cdot 18\\ \text{dar } (a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)\end{array}\right\}\Rightarrow(a+b+c)\sqrt{9+a+b+c}\geq\sqrt{54abc}=3\sqrt{6abc}$........ 4p



Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro