Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a VII-a
Barem de corectare

Problema 1.

Fie $A=\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9}+\cdots+\sqrt{1+3+5+\cdots+8077}$. *Arătați că* $\sqrt{A}$ *este un număr natural.*

Soluție și barem:

Vom folosi faptul că $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$, oricare ar fi numărul natural nenul n. **(3p)**

Obținem că $A=\sqrt{1}+\sqrt{3^2}+\sqrt{5^2}+\cdots+\sqrt{4039^2}=1+3+5+\cdots+4039=2020^2$. **(3p)**

De aici, $\sqrt{A}=2020$ este număr natural. **(1p)**

Problema 2.

Se consideră trapezul isoscel ABCD. Diagonalele trapezului se intersectează în O, iar M este simetricul punctului B față de O. Demonstrați că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare dacă şi numai dacă dreptele AD şi MC sunt perpendiculare.

Claudiu-Ştefan Popa

Soluție și barem:

Deoarece trapezul $ABCD$ este isoscel, avem că $AO=BO$. Dar $BO=OM$, prin urmare mediana AO a triunghiului ABM este egală cu jumătatea laturii pe care cade. Deducem că $\widehat{MAB}=90^\circ$ şi, cum $AB\parallel CD$, urmează că $CD\perp AM$. **(3p)**

Presupunem că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare; atunci MO şi CD sunt înălțimi în triunghiul AMC. Punctul D va fi ortocentrul acestui triunghi, iar AD va fi cea de-a treia înălțime, aşadar dreptele AD şi MC sunt perpendiculare. **(2p)**

Reciproc, presupunem că dreptele AD şi MC sunt perpendiculare. Rezultă că AD şi CD sunt înălțimi în triunghiul AMC. Punctul D va fi ortocentrul acestui triunghi, iar MO va fi cea de-a treia înălțime, aşadar dreptele AC şi BD sunt perpendiculare. **(2p)**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 3.

Se consideră triunghiul ABC, având aria $360\,cm^2$. *Pe laturile BC şi CA se consideră punctele T, respectiv S, aşa încât* $BT = 2\cdot TC$ *si* $CS = 3\cdot SA$. *Dreptele AT şi BS se intersectează în punctul P. Aflaţi aria patrulaterulu CTPS.*

Soluție și barem:

Se arată că aria triunghiului ATC este $120\,\text{cm}^2$, iar aria triunghiului BSC este $270\,\text{cm}^2$. **(2p)**

Notăm cu a şi b ariile triunghiurilor APS, respectiv CPT; atunci aria triunghiului CPS va fi $3a$, iar aria triunghiului BPT va fi $2b$. **(2p)**

Rezultă că $4a+b=120$ şi $3a+3b=270$, de unde $a=10$, $b=80$. Astfel, aria patrulaterului $CTPS$ (egală cu $3a+b$) este $110\,\text{cm}^2$. **(3p)**

Problema 4.

Pe o masă se află 107 *cartonaşe roşii,* 105 *albastre,* 103 *verzi şi* 101 *galbene. O mutare înseamnă alegerea a trei cartonaşe de culori diferite şi vopsirea lor în cea de-a patra culoare. Este posibil ca, după un număr de mutări, toate cartonaşele să devină la fel colorate*?

Ioan-Viorel Codreanu

Soluție și barem:

Răspunsul este NU. **(1p)**

După o mutare, numărul cartonaşelor de o anumită culoare fie se micşorează cu 1, fie creşte cu 3. **(2p)**

Diferența dintre numărul cartonaşelor roşii şi numărul celor albastre fie rămâne aceeaşi, fie scade cu 4, fie creşte cu 4. **(2p)**

Inițial, această diferență este egală cu 2, număr care nu se divide cu 4. În urma unui număr de mutări, ea nu are cum să ajungă nici 0 (cum ar trebui să fie dacă la final toate cartonaşele ar deveni verzi sau galbene), nici ± 416 (cum ar trebui să fie dacă la final toate cartonaşele ar deveni roşii sau albastre), deoarece 0 şi ± 416 sunt numere divizibile cu 4. **(2p)**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro