Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iași
17.01.2020
CLASA a VI-a
Barem de corectare

1. **Problema 1.**

Fie proporția $\frac{34a+101b}{80}=\frac{c}{3}$, *unde a, b și c sunt numere naturale. Arătați că* *2020* divide $(2a+3b)\cdot(5a+4c)$.

Soluție:

$\frac{34a+101b}{80}=\frac{c}{3} \Leftrightarrow 3\cdot(34a+101b)=80\cdot c \Leftrightarrow 102a+303b=$……………….**2 puncte**

$202a+303b=100a+80c \Leftrightarrow 101(2a+3b)=20(5a+4c)$…………………..….. **2 puncte**

$(101,20)=1$, *rezultă* că $101|(5a+4c)$ și $20|(2a+3b)$………………………… **2 puncte**

Finalizare………………………………………………………………**1 punct**

Total 7 puncte

2. **Problema 2.**

Din luna septembrie, până în luna decembrie, prețul unui kilogram de mere crește cu 20%, dar cantitatea de mere vândută în decembrie este cu 30% mai mică decât cea din septembrie. Cu ce procent au scăzut încasările din decembrie, față de încasările din septembrie?

Soluție:

Notează cu x prețul din septembrie al unui kilogram de mere și cu y cantitatea de mere vândută în septembrie și obține $x\cdot y$ valoarea încasărilor din septembrie……………………………………………………………**2 puncte**

$120\%x=\frac{6x}{5}$ reprezintă prețul unui kilogram de mere în decembrie,

$70\%y=\frac{7y}{10}$ reprezintă cantitatea de mere vândută în decembrie……….**2 puncte**

$\frac{6x}{5}\cdot\frac{7y}{10}=\frac{84}{100}xy$ reprezintă încasările din decembrie……………………..**2 puncte**

$100\%-84\%=16\%$. Încasările au scăzut cu 16%......................................**1 punct**

Total 7 puncte

3. Problema 3.

a) Aflați măsurile a cinci unghiuri formate în jurul unui punct, știind că sunt exprimate în grade prin 5 numere naturale pare consecutive.

b) Aflați cel mai mare număr de unghiuri formate în jurul unui punct astfel încât măsurile lor, exprimate în grade, să fie numere naturale impare consecutive.

Soluție:

a) Notează cu $n, n+2^\circ, n+4^\circ, n+6^\circ, n+8^\circ$ măsurile celor 5 unghiuri și obține:
$5n+20^\circ=360^\circ$ ……………………………………………………**2 puncte**

Obține n=68° și măsurile unghiurilor de 68°, 70°, 72°, 74° și 76°…………**1 punct**

b) Notează cu n, măsura primului unghi și ia n, n+2°, n+4°, …n+2k° măsurile celor k+1 unghiuri formate în jurul unui punct……………………………**1 punct**

$n+(n+2^\circ)+(n+4^\circ)+\cdots+(n+2k^\circ)=360^\circ \Leftrightarrow (k+1)(n+k)=360^\circ$……**1 punct**

$(k+1)|360$ și din $n\geq 1 \Leftrightarrow n+k\geq k+1 \Leftrightarrow (k+1)^2\leq 360 \Leftrightarrow (k+1)^2\leq 324=18^2$,

$k\leq 17$…………………………………………………………………**1 punct**

$k=17$, obținem $n=3^\circ$ și numărul căutat este 18……………………**1 punct**

Total 7 puncte

4. Problema 4.

Se dau 6 puncte, oricare trei fiind necoliniare. Segmentele care unesc aceste puncte se colorează cu albastru sau roșu. Arătați că există un triunghi cu vârfurile în punctele date care are toate laturile de aceeași culoare.

Soluție:

Fie A, B, C, D, E și F punctele. Dintre segmentele AB, AC, AD, AE și AF, cel puțin 3 au aceeași culoare……………………………………………**3 puncte**

Presupunem fără a restrânge generalitatea că acestea sunt AB, AC și AD și că sunt albastre. Dacă unul dintre segmentele BC, BD și CD este și el albastru, atunci se formează un triunghi cu segmentele ce pleacă din A. Altfel, toate sunt roșii și triunghiul BCD are toate laturile roșii……………………………**4 puncte**

Total 7 puncte