Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a V-a
Barem de corectare

Problema 1. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că $\overline{ab} = \overline{bc} + a^3$, iar $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Soluție și barem: Dacă $\overline{ab} = \overline{bc} + a^3 \Rightarrow a^3 < 99 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4\}$……………………………………….**2 p**

1) $a = 1 \Rightarrow \overline{1b} = \overline{bc} + 1 \Rightarrow 9 = 9b + c \Rightarrow b = 1$ și $c = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 110$...**1 p**
2) $a = 2 \Rightarrow \overline{2b} = \overline{bc} + 2^3 \Rightarrow 12 = 9b + c \Rightarrow b = 1$ și $c = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 213$..**1 p**
3) $a = 3 \Rightarrow \overline{3b} = \overline{bc} + 3^3 \Rightarrow 3 = 9b + c$, fals deoarece $b \neq 0$...**1 p**
4) $a = 4 \Rightarrow \overline{4b} = \overline{bc} + 4^3 \Rightarrow 40 = 9b + c + 64$ (fals)

Finalizare: $\overline{abc} \in \{110; 213\}$………………………………………………………………...…**1 p**

Oficiu **1 p**

Problema 2. Vlad are o sumă de bani. După ce dublează suma cheltuiește 160 lei. Triplează suma rămasă și mai cheltuiește 900 lei. După ce dublează noul rest și cheltuiește 600 lei constată că i-au mai rămas 900 lei. Ce sumă inițială a avut Vlad?

Soluție și barem: Notăm cu S suma inițială...**1 p**

Ținând cont de enunț, obținem ecuația $2 \cdot [3 \cdot (2 \cdot S - 160) - 900] - 600 = 900$…………………………..**3 p**

Finalizare. Se obține S = 355 lei...**3 p**

Problema 3. Se scriu în ordine primele 2020 numere naturale nenule. Eliminăm din acest șir o parte din numere după următorul procedeu: tăiem un număr, sărim un număr; tăiem două numere, sărim două numere; tăiem trei numere, sărim trei numere; ș.a.m.d.

a) Verificați dacă 2020 este tăiat sau nu.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

b) Câte numere au rămas netăiate?

Soluție și barem: a) Pasul 1: tăiem un număr, sărim un număr;
Pasul 2: tăiem două numere, sărim două numere;
Pasul 3: tăiem trei numere, sărim trei numere;
.
.
.
Pasul n: tăiem n numere, sărim n numere;
După n pași, vom avea $1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot (n + 1) : 2$ numere sărite => vom avea $n \cdot (n + 1)$ numere tăiate și sărite………………………………………………………………………………………………**2 p**
Căutăm acel $n \in N$ pentru care $n \cdot (n + 1) < 2020$ și pentru care nu se mai poate aplica pasul următor (adică cel mai apropiat produs de două numere consecutive mai mic decât 2020)..**2 p**
Găsim $n = 44$ => $44 \cdot 45 = 1980$ numere tăiate sau sărite, vom avea 990 numere tăiate și 990 numere sărite și au rămas 40 de numere care vor fi tăiate, prin urmare 2020 va fi tăiat...**1 p**

b) Șirul va conține $990 + 40 = 1030$ numere tăiate și 990 numere sărite (netăiate).......................................**1 p**

Oficiu **1 p**

Problema 4. Determinați x, y, z numere naturale dacă

$$2^{5x+1} + 2^{2y} + 2^{z} = 2368$$

Soluție și barem: Se scrie în mod unic $2368 = 2^{11} + 2^{8} + 2^{6}$...**2 p**
Ecuația devine $2^{5x+1} + 2^{2y} + 2^{z} = 2^{11} + 2^{8} + 2^{6}$...**1 p**
Analizăm cazurile

1) $5 \cdot x + 1 = 11$
   $2 \cdot y = 8$
   $z = 6$
   sau
2) $5 \cdot x + 1 = 11$
   $2 \cdot y = 6$
   $z = 8$
   sau
3) $5 \cdot x + 1 = 6$
   $2 \cdot y = 8$
   $z = 11$...**3 p**

Finalize. Se obțin soluțiile

1) $x = 2, y = 4, z = 6$
2) $x = 2, y = 3, z = 8$
3) $x = 1, y = 4, z = 11$..**1 p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro