CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a XII-a
Secțiunea H1

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\arcsin x-1, & x\in(-\infty,0]\\ \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$

a) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

c) Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea $\int_{1}^{4} f(x)dx = a+4\ln\frac{3}{2}$.

Soluție:

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin^2 x\cdot\cos x\right)=-1=f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=-1$ 2p

1.b) $\int_{-1}^{0}(x)'\arcsin x dx-\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}=-\dfrac{1+\pi}{2}$ .... 2p.

1. c) – 3p, din care:

$\int_{1}^{4} f(x)dx=\int_{1}^{2}\dfrac{t^2-t}{t+1}dx=$ 2p

$=-1+4\ln\dfrac{3}{2}$, $a=-1$ 1p

Problema 2.

Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\ln\left(e^{-x}+1\right)-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+m$,

$g(x)=e^x\ln\left(e^{-x}+1\right)+e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)$, unde m este un număr real.

a) Determinați numărul real m știind că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Pentru $m=2020$, determinați $\int_{1}^{e}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx$.

Soluție:

2. a) $g'(x)=e^x\ln\left(e^{-x}+1\right)-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+1$, deci $m=1$ 3p

2. b) -4p, din care:

$\int_{1}^{e}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=g(x)\Big|_0^1+2019x\Big|_0^1=$ 3p

$=\left(e+\frac{1}{e}\right)\ln(e+1)-\ln 4-e+2019$ 1p

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2}-\frac{x+y}{4}+\frac{5}{8}$ și se definește legea de compoziție $x\circ y=x*y*a$, unde a este un număr real.

a) Determinați simetricul elementului -3 în raport cu legea de compoziție "$*$".

b) Știind că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă, determinați numerele reale a pentru care ecuația $x\circ x\circ x\circ x=a$ are două soluții reale.

Soluție:

3.a) – 3p, din care:

Elementul neutru $e=\frac{5}{2}$ 1p

Simetricul elementului -1 este 2p

3.c)- 4p, din care:

$x\circ x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ 1p

$x\circ x\circ x\circ x=\frac{1}{2^6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4\left(a-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}$ 2p

Ecuația are două soluții reale $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 1p

Problema 4.

Se consideră $\mathbb{Z}_{23}$(mulțimea claselor de resturi modulo 23) cu operațiile uzuale. Pentru criptarea mesajelor se folosește codificarea literă cu literă a cuvintelor, utilizând tabelul de mai jos

A	B	C	D	E	F	G	H	I,J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	X,Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

și cheia de criptare $\hat{c}=\hat{3}\cdot\left(m+\hat{5}\right)+19$, unde m reprezintă numărul corespunzător literei în tabelul dat, iar operațiile se efectuează în $\mathbb{Z}_{23}$.

a) Determinați inversul elementului $\hat{3}$ în corpul $(\mathbb{Z}_{23},+,\cdot)$.

b) Scrieți codul corespunzător cuvântului MAT și aflați cuvântul ce are codul $(21;7;20)$.

c) Determinați cheia de decriptare a mesajelor ($m=f\left(\hat{c}\right)$).

Soluție:

4. a) $\hat{3}\cdot x=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{23}\Leftrightarrow\ 3x=23c+1,\ x=\hat{8}$..2p

4. b) -2p, din care:

$(1;8;19)$...1p

LOC 1p

c) $\hat{c}+4=\hat{3}\cdot\left(m+\hat{5}\right)\Leftrightarrow m+\hat{5}=\hat{8}\cdot\left(\hat{c}+4\right)\Leftrightarrow m=\hat{8}\cdot\left(\hat{c}+4\right)+18$ 3p