

OLT 2009 OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

CLASA a V-a

1. a) Calculați :  $2009^0 + 2009^1 + 0^{2009} + 1^{2009} + 2009 \cdot 0$  .  
b) Care este cel mai mare număr de forma  $\overline{xyz}$  divizibil cu 5 ?  
c) Câte numere de forma  $\overline{xy4}$  sunt divizibile cu 2 ? Justificați răspunsul dat.
2. a) Arătați că numărul  $a = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$  este multiplu de 15.  
b) Aflați numărul natural x din relația :  $42 \cdot 7^x - 3^2 \cdot 7^x + 2^3 \cdot 7^x = 2009$
3. a) Dacă  $a + b = 33$  și  $a + c = 11$  arătați că  $5a + 3b + 2c$  este pătrat perfect.  
b) Comparați numerele  $4 \cdot 3^{3013}$  și  $3 \cdot 4^{2009}$  .
4. La o împărțire a două numere naturale suma dintre cât, împărțitor și rest este 114. Știind că diferența dintre cât și împărțitor este 55, iar împărțitorul este cu 2 mai mic decât triplul restului, aflați cele două numere.

CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

1. Efectuați calculul :  $\frac{1}{2008} - \frac{1}{2008 \cdot 2009}$  .
2. Aflați valoarea produsului:  $\left(1 - \frac{1}{2007}\right) \left(1 - \frac{1}{2008}\right) \left(1 - \frac{1}{2009}\right)$  .
3. Aratați ca rezultatul calculelor urmatoare este un numar natural:

$$\left[ \left( \frac{1}{15} - \frac{1}{18} \right) : \frac{1}{45} + \frac{1}{60} : \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{15} \right) \right] : 1 \frac{1}{2} .$$

SUBIECTUL II

1. Demonstrați ca numărul  $7^{2009} - 7^{2008} - 7^{2007}$  este divizibil cu 2009.
2. Aflați restul împărțirii numărului  $a = 7^{2009} - 7^{2008} - 7^{2007} + 7^{2006} - 7^{2005} - 7^{2004} + \dots + 7^5 - 7^4 - 7^3 + 7^2 - 7 - 1$  la 2009. Prof. Nicolae Tomescu

SUBIECTUL III

Determinați numerele de forma  $\overline{x3x6y}$  știind ca dau restul 7 la împartirea prin 9.  
Prof. Nicolae Bivol

SUBIECTUL IV

În jurul unui punct O avem unghiurile  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOA$  astfel încât  $\angle BOC = 2m(\angle AOB), m(\angle COD) = 2m(\angle BOC), m(\angle DOE) = 5m(\angle AOB), m(\angle EOA) = 4m(\angle BOC)$ . a

- a) Precizați unghiurile ascuțite, drepte, obtuze care se formează în jurul punctului O.
- b) aratați ca semidreptele [OA și bisectoarea  $\angle COD$  formează un unghi drept.

OLT 2009 OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a VII-a

I. a) Arătați că:  $89=2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$ .

b) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că orice număr de forma:  $A=10^{2n}-10^{2n-1}-10^{2n-2}$  se poate scrie sub forma:  $x^2+y^2+z^2$ , unde  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$  și sunt distincte (Daniel Cojocaru, Slatina)

II. Știind că:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$ ,  $x, y \in \mathbb{N}^*$ , arătați că  $\sqrt{\left(\frac{x}{41} - 49\right)\left(\frac{y}{41} - 49\right)}$  este pătrat perfect. Ion Neață, Slatina

III. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC în care  $m(\hat{C}) = 2m(\hat{A})$  și  $AC = 2BC$

IV. În triunghiul ABC construim bisectoarea [AD a unghiului A,  $D \in (BC)$ .

Fie  $M \in (BD)$ ,  $N \in (DC)$  și  $MQ \parallel AD \parallel NP$ , unde  $Q \in (AB)$  și  $P \in (AC)$ . Să se arate că:  $\frac{AP}{AQ} = \frac{DN}{DM}$

Ion Neață, Slatina

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1. Determinați  $x, a, b$  care satisfac egalitatea:  $453_{(x-2)} + 231_{(x)} = \overline{4ab}$

SUBIECTUL 2. a) Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale, arătați că:  $a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

b) Demonstrați că:

$$\sqrt{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

oricare ar fi  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \in \mathbb{R}$  și  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . În ce caz avem egalitate?

SUBIECTUL 3. Fie expresia:  $E(x) = \left(\frac{x^2 + 7x + 10}{4 - x^2} - \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6} + \frac{x^2}{2 - x}\right) \cdot \left(\frac{1}{2 - x}\right)^{-1}$

a) Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care expresia  $E(x)$  este definită. b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă c) Arătați că  $E(x)$  este pozitivă pentru orice valoare a lui  $x$ , determinată la a)

SUBIECTUL 4. Fie triunghiul ABC cu latura  $AB=x$ ,  $BC=y$ ,  $AC=z$  unde  $x, y, z$  verifică relația:

$$\sqrt{x^2 - 12x + 61} + \sqrt{y^2 - 20y + 149} + \sqrt{z^2 - 16z + 73} \leq 15$$

Construim pe planul acestuia perpendiculara  $AM=8$  cm. Se cere:

a) Lungimile laturilor triunghiului și precizați natura acestuia. b) Calculați distanța de la punctul A la planul (MBC). c) Dacă  $P \in (AC)$  și  $PC = \frac{1}{2}BC$  iar  $Q \in (BC)$  astfel încât  $CQ = \frac{1}{2}AC$ , calculați distanța de la punctul M la dreapta PQ.

Propunători: Prof. NIȚU IOANA – Șc. „G. Magheru” - Caracal

Prof. NEGRILĂ VICTORIA – Șc. Nr.2 - Caracal