CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI" 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a XI-a
Secțiunea H1 - BAREM

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\in(-\infty,0)\\ x\left(ax-\sqrt{bx^2+cx-2}\right), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$, unde a,b,c sunt numere reale, $b>0$.

a) Aflați numărul real a pentru care funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.

b) Determinați numerele reale a,b,c, $b>0$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

c) Pentru $a=0$, determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

Soluție:

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x+a}{1+2^{\frac{1}{x}}}=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left(ax-\sqrt{bx^2+cx+2}\right)=0=f(0)$, $a=0$ 2p

1.b) - 3p, din care:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ este finită $\Rightarrow$ $a^2=b$, $c=0$ 2p

$a=b=1$..1p

1.c) – 3p, din care:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$..1p

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\left(1-2^{\frac{1}{x}}\right)}{\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{2\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)}\right)=-\dfrac{\ln 2}{4}$, dreapta de ecuație $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln 2}{4}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f 2p

Problema 2.

Pentru fiecare număr natural n se consideră funcția $f_n:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^2-nx+2}{x^2-1}$

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_3(x)$.

b) Se notează $g(n)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f_n(x)\right)^x$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(1)+g(2)+...+g(n)\right)$.

Soluție:

2.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_3(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$ 3p

2.b) - 4p, din care:

$g(n)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-nx+2}{x^2-1}\right)^x=e^{-n}$ 2p

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(1)+g(2)+...+g(n)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-1}\left(e^{-n}-1\right)}{e^{-1}-1}=\dfrac{1}{e-1}$ 2p

Problema 3.

În mulțimea matricelor pătratice de ordin 2 se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x & -3\\ 3 & y\end{pmatrix}$, unde x,y sunt numere întregi.

a) Determinați perechile de numere x,y pentru care $A^2=7I_2$.

b) Determinați matricele A cu proprietatea că $\det(A+B)+\det(A-B)=2\det B$, pentru orice matrice $B\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Demonstrați că $\det\left(A^2+A^{2020}\right)+\det\left(A^2-A^{2020}\right)\geq 0$, pentru orice numere întregi x,y.

Soluție:

3.a) - 2p, din care:

$A^2=\begin{pmatrix} x^2-9 & -3x-3y\\ 3x+3y & y^2-9\end{pmatrix}$ 1p

$(4,-4),(-4,4)$ 1p

3.b) – 3p, din care:

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\det A=0$ 1p

$xy=-9,\ x,y\in\mathbb{Z}\iff A_1=\begin{pmatrix}1&-3\\3&-9\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&9\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}3&-3\\3&-3\end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix}9&-3\\3&-1\end{pmatrix}$

$A_6=\begin{pmatrix}-9&-3\\3&1\end{pmatrix}$ 2p

3.c) - 2p, din care:

(Eventual din b)): $\det(A+B)+\det(A-B)=2\det B+2\det A$ 1p

$\det\left(A^2+A^{2020}\right)+\det\left(A^2-A^{2020}\right)=\det\left(A^2\right)\left(\det\left(I_2+A^{2018}\right)+\det\left(I_2-A^{2018}\right)\right)=$

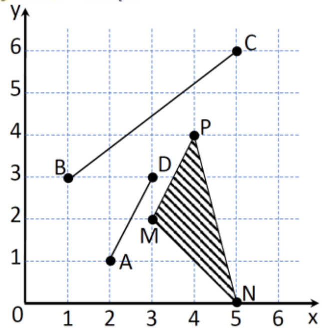
$=(\det A)^2\left(2\det(I_2)+2\det(A)^{2018}\right)\geq 0$ 1p

Problema 4.

Figura următoare prezintă o schemă a planurilor de construcție a unor căi rutiere, cu următoarele convenții : drumurile sunt reprezentate prin segmente de dreaptă, punctele reprezintă orașe, o unitate de măsură a lungimii din figură corespunde la 10 km distanță reală, iar distanțele reale se aproximează prin rotunjire la numere întregi. Zona hașurată reprezintă suprafață împădurită.

a) Calculați aria suprafeței împădurite.

b) Dacă se prelungește în linie dreaptă autostrada AD, la ce distanță de orașul C se vor intersecta cele două autostrăzi din figură ?



Soluție:

4.a) - 3p, din care:

$M(3,2)$, $N(5,0)$, $P(4,4)$, aria triunghiului MNP este de 6 u.m^2 ……………………………………2p

Aria suprafeței împădurite este $600\,\text{km}^2$ ………………………………………………………………….1p

4.b) - 4p, din care

$A(2,1)$, $B(1,3)$, $P(5,6)$, ecuațiile dreptelor: $AB: 2x - y - 3 = 0$, $CD: 3x - 4y + 9 = 0$ ……………2p

Punctul de intersectie este $P(4,2;\,5,4) \Rightarrow CP = 1$, deci distanta este $10\,\text{km}$ ………………………….2p