CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI” 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a IX-a – Secțiunea H1
BAREM

Problema 1.

Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ și $b=1+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

a) Determinați numărul rațional x pentru care numărul $a+b\cdot x$ este rațional.

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a,b.

c) Demonstrați că numărul $a^{2^n}+b^{2^n}$ este rațional, oricare ar fi numărul natural n.

Soluție:

1.a) - 3 p,din care:

Calcul direct , $a=4+\sqrt{2}$, $b=4-\sqrt{2}$, ...2p

$a+bx\in\mathbb{Q}$, $x\in\mathbb{Q}$, deci $x=1$ 1p

1.b) - 2p:

$Ma=4$, $mg=\sqrt{14}$ 2p

1.c) - 2p, din care:

$n=0,\ a+b\in\mathbb{Q}$, $a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}=\left(a^{2^k}\right)^2+\left(b^{2^k}\right)^2=\left(a^{2^k}+b^{2^k}\right)^2-2(ab)^{2^k}\in\mathbb{Q}$ 2p

Problema 2.

Se consideră șirurile (x_n), (y_n), definite prin $x_0=4, x_{n+1}=\frac{3x_n+1}{x_n+3}$, $y_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n-1}$, $n\geq 0.$

a) Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică.

b) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Soluție:

2.a) - 4p, din care:

Scrie o proprietate caracteristică a progresiei geometrice 2p

Calculează, de exemplu, $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\frac{x_n+1}{x_n-1}}{\frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}-1}}=2,\forall n$ 2p

2.b) - 3p, din care:

(y_n) este o progresie geometrică cu $y_1=\frac{x_0+1}{x_0-1}=\frac{5}{3}$ și rația egală cu 2, deci $y_n=y_1q^{n-1}=\frac{5}{3}2^{n-1}$......2p

Din $y_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n-1}$ reiese că $x_n=\frac{52^n+3}{52^n-3}$ 1p

Problema 3. Un biolog care studiază dinamica numărului de păsări din stoluri a constatat că, în general, în fiecare minut după ridicarea de la sol, 10% din păsări părăsesc stolul și 30 de păsări intră în stol. El s-a decis să utilizeze această regulă în studiul său, cu convenția suplimentară că rezultatul acestui calcul pentru fiecare minut se aproximează prin lipsă la număr natural (aproximare prin lipsă la unitate).

a) Dacă un stol are la ridicarea de la sol 200 de păsări, determinați câte păsări sunt în stol după trei minute.

b) Arătați că pot exista stoluri al căror efectiv rămâne constant în timp.

c) Aflați numărul de păsări la ridicarea de la sol a unui stol care după 2 minute are 110 păsări.

Soluție:

3.a) - 2p, din care:

$p_1 = \left[\frac{9}{10}p_0 + 30\right] = 210$, $p_2 = 219$, $p_3 = 227$ 2p

3. b) - 3p, din care:

Relația de recurență este $p_n = \left[\frac{9}{10}p_{n-1} + 30\right]$ 1p

Efectiv constant $\Leftrightarrow p_n = p_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Rezolvă ecuația $p_n = \left[\frac{9}{10}p_n + 30\right]$ și obține $p_0 = p_n = 300$....................1p

3. c) $p_2 = 110 \Rightarrow$, $110 = \left[\frac{9}{10}p_1 + 30\right]$, $p_1 = 89 \Rightarrow p_0 = 66$....................2p

Problema 4.

În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N astfel încât $\overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = n \cdot \overrightarrow{NC}$, unde m, n sunt numere reale cu $m, n \in (0,1)$ și $m \neq \frac{n}{n+1}$.

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

b) Pentru $m = \frac{1}{3}$ și $n = \frac{2}{3}$, dacă notăm cu P punctul de intersecție al dreptelor MN și AD, determinați numărul întreg k pentru care $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AD}$.

4.a) - 2p,din care:

$\overrightarrow{AN} = \frac{n}{n+1} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{n}{n+1} - m\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+1} \cdot \overrightarrow{AD}$ 2p

4.b) - 5p, din care:

$\overrightarrow{MP} = -m\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$ 2p

$\overrightarrow{MP}$ și $\overrightarrow{MN}$ coliniare $\Leftrightarrow k = -2$ 3p