CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 ianuarie 2020
Barem de corectare şi notare
CLASA a XI-a H 2

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
1.a	$I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ $(I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A$	2p
1.b	$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = -A$. Deci $A^2 = -A$. $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$ $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-A) \cdot (-A) = A^2 = -A$ Deci, dacă $n = 2k$, atunci $A^n = -A$, iar dacă $n = 2k + 1$, atunci $A^n = A$. Prin urmare $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{-A, A\}$ şi deci este o mulţime finită.	2p
1.c	$X^3 = A \Longrightarrow \det(X^3) = \det(A)$. Cum $\det(A) = 0$, obţinem $\det(X^3) = 0$ şi deci $\det(X) = 0$. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $\det(X) = ad - bc = 0$ şi deci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{not}{=} k$. Rezultă $X = \begin{pmatrix} kb & b \\ kd & d \end{pmatrix}$. Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} kb & b \\ kd & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kb & b \\ kd & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb(kb+d) & b(kb+d) \\ kd(kb+d) & d(kb+d) \end{pmatrix} =$ $(kb+d)\begin{pmatrix} kb & b \\ kd & d \end{pmatrix} = (kb+d)X$. În continuare $X^3 = X^2 \cdot X = (kb+d)X^2 = (kb+d)^2 X$. Atunci ecuaţia $X^3 = A$ devine $(kb+d)^2 X = A$, de unde $X = \frac{1}{(kb+d)^2} A$ şi $X^3 = \frac{1}{(kb+d)^6} A^3$. Cum $A^3 = A$ şi $X^3 = A$, obţinem $A = \frac{1}{(kb+d)^6} A$, adică $\frac{1}{(kb+d)^6} = 1$. Prin urmare $\frac{1}{(kb+d)^2} = 1$ şi deci $X = A$.	3p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
2.a	$\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1)$	1p
	$l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{\sqrt{1+3}} = 2$ $l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{a \cdot tg(x-1)}{x^2+3x-4} = a \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{tg(x-1)}{(x-1)(x+4)}$ $= \frac{a}{5} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{tg(x-1)}{x-1} = \frac{a}{5}$	2p
	Atunci $2 = \frac{a}{5}$ şi deci $a = 10$.	1p

2.b	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}} = -3$ Deci $y = -3$ este asimptota spre $-\infty$ a graficului funcției f.	2p 1p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
3.a	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{27}{x^3+27}\right) = \lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2-3x+9-27}{(x+3)(x^2-3x+9)}\right)$	1p
	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2-3x-18}{(x+3)(x^2-3x+9)}\right) = \lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{(x+3)(x-6)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\right)$ $= \lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{(x-6)}{(x^2-3x+9)}\right)$	1p
	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{(x-6)}{(x^2-3x+9)}\right) = -\frac{9}{27} = \frac{-1}{3}$	1p
3.b	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(5^x-1)ln(1+5sinx)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right)tg(5x)}$ $= \lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}\cdot\frac{5x}{tg(5x)}\cdot\frac{ln(1+5sinx)}{5sinx}\cdot\frac{sinx}{x}\cdot\frac{x}{1}$ $\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}$	2p
	$ln5\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-x-1} = \frac{ln5}{1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+1\right)x}{(x^2+x+1)-(x+1)^2} =$	1p
	$= \frac{ln5}{1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+1\right)x}{-x} = -2ln5$	1p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
4.	Fie $C(a,b)$ vârful comun. Deoarece $C(a,b)\in d: 2y-x+3=0$, vom avea $2b-a+3=0$. Astfel $b=\frac{a-3}{2}$ şi $C(a,\frac{a-3}{2})$. $b\geq0 \Longrightarrow a\geq3$ Cum parcelele au aceeaşi arie, avem $A_{\Delta ABC}=A_{\Delta OCD}$ şi deci $\lvert\Delta_1\rvert = \lvert\Delta_2\rvert$, unde $\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ a & \frac{a-3}{2} & 1\end{vmatrix} = \frac{3a+9}{2}$ şi $\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 1\\ a & \frac{a-3}{2} & 1\end{vmatrix} = \frac{5(a-3)}{2}$. Din condiţia $\lvert\Delta_1\rvert = \lvert\Delta_2\rvert$ rezultă $\lvert3a+9\rvert = \lvert5a-15\rvert$, având soluţiile $a=12$ şi $a=\frac{3}{4}$. Cum $a\geq3$, soluţia problemei va fi $C(12,\frac{9}{2})$.	1p 1p 2p 2p 1p