CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 17 ianuarie 2020
Barem de corectare şi notare
CLASA a XII-a H2

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
1.a	$\begin{cases} x \in (-5;5) \\ y \in (-5;5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lvert x \rvert < 5 \\ \lvert y \rvert < 5 \end{cases} \Rightarrow \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert < 25 \Rightarrow \lvert xy \rvert < 25 \Rightarrow -25 < xy < 25 \Rightarrow \begin{cases} -25 < xy \\ xy < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 25 + xy \\ xy - 25 < 0 \end{cases}.$	1p
	Demonstrăm că $x * y \in (-5;5), (\forall) x, y \in (-5;5)$. Deoarece $25 + xy > 0$, a arăta că $-5 < \frac{25(x+y)}{25+xy} < 5 \Leftrightarrow -1 < \frac{5(x+y)}{25+xy} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -25 - xy < 5x + 5y \\ 5x + 5y < 25 + xy \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 25 + xy + 5x + 5y \\ 0 < 25 + xy - 5x - 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (x+5)(y+5) \\ 0 < (x-5)(y-5) \end{cases}.$ Din ipoteză avem $\begin{cases} -5 < x < 5 \\ -5 < y < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x \\ x < 5 \\ -5 < y \\ y < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x + 5 \\ x - 5 < 0 \\ 0 < y + 5 \\ y - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < (x+5)(y+5) \\ 0 < (x-5)(y-5) \end{cases}.$	1p
1.b	Asociativitatea Comutativitatea Elementul neutru este $e = 0 \in G$. Orice element din G este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie $" * "$.	1p 1p 1p 1p
1.c	Demonstrăm că f este un morfism de grupuri. $(\forall) x, y \in (-5;5) = G, f(x * y) = f(x) + f(y)$. $f(x * y) = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{25 + xy + 5x + 5y}{25 + xy - 5x - 5y} = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{(x+5)(y+5)}{(5-x)(5-y)}.$ $f(x) + f(y) = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{(5+x)}{(5-x)} + \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{(5+y)}{(5-y)}$ $= \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{(x+5)(y+5)}{(5-x)(5-y)}.$ f morfism de grupuri şi f bijectivă $\Rightarrow f$ este izomorfism de grupuri.	1p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
2.a	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & -2xy \\ -2xy & 2xy \end{pmatrix} = A(2xy)$, $(\forall) A(x), A(y) \in G$.	1p
2.b	Arătăm că elementul neutru în grupul $(G, \cdot)$ este $A\left(\frac{1}{2}\right)$.	

		1p
	Arătăm că simetricul elementului $A(x) \in G$ este $[A(x)]' = A\left(\frac{1}{4x}\right) \in G$.	1p
	$[A(2020)]' = A\left(\frac{1}{4\cdot 2020}\right) = A\left(\frac{1}{8080}\right)$	1p
2.c	Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice propoziţia $P(n): [A(x)]^n = A(2^{n-1}\cdot x^n)\,, n \in \mathbb{N}^*$. $[A(x)]^{2020} = A(2^{2019}\cdot x^{2020})$.	1p 1p
	$\begin{pmatrix} 2^{2019} & -2^{2019} \\ -2^{2019} & 2^{2019} \end{pmatrix} = A(2^{2019})$. $[A(x)]^{2020} = A(2^{2019}) \Leftrightarrow A(2^{2019}\cdot x^{2020}) = A(2^{2019}) \Leftrightarrow$ $2^{2019}\cdot x^{2020} = 2^{2019} \Leftrightarrow x^{2020} = 1$. Ecuaţia $x^{2020} = 1$ admite soluţiile reale nenule $x_1 = -1, x_2 = 1$. $A(x_1) = A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A(x_2) = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $S = \{A(-1), A(1)\}$.	1p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
3.a	$\int f_1(x)dx = \int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx =$ $x - 2\ln(x+2) + C$.	1p
	$\int f_2(x)dx = \int \frac{x^2}{x+2}dx$ $= \int \frac{x^2-4+4}{x+2}dx = \int \left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right)dx =$ $= \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2) + C$.	1p 1p
3.b	f_n este funcţie continuă pe $(-2;\ \infty) \Rightarrow$ f_n admite primitive $\Rightarrow$ $(\exists)F_n : (-2;\ \infty) \to \mathbb{R}\,, F_n$ derivabilă pe $(-2;\ \infty)$, $F_n{}'(x) = f_n(x), (\forall)x \in (-2;\ \infty)$. F_n este derivabilă şi descrescătoare pe $(-2;\ 0)$, atunci $F_n{}'(x) \le 0$, $(\forall)x \in (-2;\ 0)$.	1p

3.c		
	${F_n}'(x) = f_n(x) = \frac{x^n}{x+2} \leq 0, (\forall) x \in (-2;\ 0) \Rightarrow n$ este număr natural impar.	1p
	$\int_1^2 \frac{x{f_n}'(x) - f_n(x)}{x^2}\, dx = \int_1^2 \left[\frac{f_n(x)}{x}\right]' dx = \frac{f_n(x)}{x}\Big\|_1^2 =$ $\frac{x^{n-1}}{x+2}\Big\|_1^2 = \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 4}{12}$	1p 1p

Nr.subiect	Soluţie	Punctaj
4.a	F se obţine din operaţii cu funcţii derivabile pe $(0;\ \infty) \Rightarrow F$ este derivabilă pe $(0;\ \infty)$. $F'(x) = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]' = 2 \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right] =$ $2 \cdot \left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}} = f(x).$ F este primitiva funcţiei f .	1p 1p
4.b	Conform punctului a) F este primitiva funcţiei f $\Rightarrow \int_1^e f(x)\, dx = F(x)\Big\|_1^e = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]\Big\|_1^e = 2\sqrt{e}$	2p
4.c	$\int_1^e f(x) \cdot F(x)\, dx = \int_1^e F'(x) \cdot F(x)\, dx = \frac{F^2(x)}{2}\Big\|_1^e =$ $= 2x[\ln x]^2\Big\|_1^e = 2e$.	1p 2p