



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală- Iași, 17 ianuarie 2020
CLASA a XII-a H 2

1. Fie mulțimea $G = (-5; 5)$ și $x * y = \frac{25(x+y)}{25+xy}$, $(\forall) x, y \in G$.
- Arătați că oricare ar fi $x, y \in G$, avem $x * y \in G$.
 - Deduceți că $(G, *)$ este grup comutativ.
 - Demonstrați că funcția bijectivă $f: (-5; 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{5+x}{5-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$ și "·" operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, oricare ar fi $A(x), A(y) \in G$.
 - Știind că (G, \cdot) este grup comutativ, determinați simetricul elementului $A(2020)$.
 - Determinați $A(x) \in G$ pentru care are loc egalitatea $\underbrace{A(x) \cdot A(x) \cdot \dots \cdot A(x)}_{\text{de } 2020 \text{ ori}} =$

$$\begin{pmatrix} 2^{2019} & -2^{2019} \\ -2^{2019} & 2^{2019} \end{pmatrix}.$$

3. Se consideră funcțiile $f_n : (-2; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Calculați $\int f_1(x) dx$ și $\int f_2(x) dx$.
- Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că orice primitivă a funcției f_n este descrescătoare pe intervalul $(-2; 0)$.
- Calculați

$$\int_1^2 \frac{x f_n'(x) - f_n(x)}{x^2} dx.$$

4. Se consideră funcțiile $f, F : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$, $F(x) = 2\sqrt{x} \cdot \ln x$.

- Arătați că F este o primitivă a funcției f .
- Calculați

$$\int_1^e f(x) dx.$$

- Calculați

$$\int_1^e f(x) \cdot F(x) dx.$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

Timpul de lucru este de 3 ore.