CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală- Iaşi, 17 ianuarie 2020
CLASA a XI-a H 2

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.
   a) Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.
   b) Să se demonstreze că mulţimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
   c) Să se rezolve ecuaţia $X^3 = A$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}, & x \le 1 \\ \dfrac{a \cdot \mathrm{tg}(x-1)}{x^2+3x-4}, & x > 1 \end{cases}$$
   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care f are limită în punctul $x_0 = 1$.
   b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a graficului funcţiei f.

3. Să se calculeze limitele:
   a) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{27}{x^3+27}\right)$;

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(5^x-1)\ln(1+5\sin x)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right)\mathrm{tg}(5x)}$.

4. Doi agricultori cumpără două parcele de formă triunghiulară având aceeaşi suprafaţă. Parcelele au un vârf comun situat pe un drum despărţitor reprezentat de semidreapta $2y - x + 3 = 0, y \ge 0$. Să se determine coordonatele vârfului comun ştiind că în afara acestuia, prima parcelă are vârfurile $A(0,3)$ şi $B(-1,1)$, iar a doua parcelă are vârfurile $O(0,0)$ şi $D(5,0)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timpul de lucru este de 3 ore.