Inspectoratul Școlar Județean Iași

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală- Iaşi, 17 ianuarie 2020
CLASA a X-a H 2

1. Se consideră numărul real $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.
   a) Demonstraţi că $a^3=4-3a$.
   b) Arătaţi că $a^3+3a-4=(a-1)(a^2+a+4)$.
   c) Deduceţi că a este număr natural.
2. Fie ecuaţia
$$\frac{x}{3+4i}-\frac{x-i}{5i}=\frac{5}{3-4i}.$$
   a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia dată.
   b) Fie z rădăcina complexă a ecuaţiei date. Calculaţi z^2 , z^4 , z^8 .
   c) Calculaţi suma $S=1+z+z^2+\cdots+z^7$, unde z este rădăcina complexă a ecuaţiei date.

3. Fie $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.
   a) Demonstraţi că
$$\frac{log_3\left(x\cdot\sqrt[3]{x}\right)+log_3(x^{-3})}{log_5(x^5)-log_5\left(x^2\cdot\sqrt{x}\right)}=-\frac{2}{3}log_3 5 .$$
   b) Arătaţi că
$$4\cdot(log_2(x^4))^2+12\cdot log_2\left(\frac{2}{x^4}\right)-(3-8\cdot log_2 x)^2 = 3 .$$
   c) Arătaţi că
$$\frac{1}{(log_x 2)\cdot(log_x 4)}+\frac{1}{(log_x 4)\cdot(log_x 8)}+\cdots+\frac{1}{(log_x 2^{n-1})\cdot(log_x 2^n)}=\frac{n-1}{n}\cdot(log_2 x)^2$$

4. Pe o hartă înzestrată cu un sistem de axe de coordonate xOy se consideră localităţile identificate de punctele necoliniare A,B,C de afixe $z_A=6+5i$, $z_B=7-3i$, respectiv $z_C=-2+4i$. Scara hărţii este 1: 100000, iar unitatea de lungime pe hartă este egală cu 1 cm.
   a) Stabiliţi natura triunghiului ABC.
   b) Identificaţi afixul punctului M din planul triunghiului ABC , punct aflat la distanţe egale faţă de punctele A,B,C .
   c) Ştiind că autostrada care trece prin localităţile A şi C este o linie dreaptă, aflaţi câţi Km va avea, în realitate, drumul minim care va lega localitatea B de autostrada construită prin A şi C.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timpul de lucru este de 3 ore.