



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI” 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a IX-a- Secțiunea H1

Problema 1.

Se consideră numerele reale $a = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ și $b = 1 + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

- Determinați numărul rațional x pentru care numărul $a + bx$ este rațional.
- Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a, b .
- Demonstrați că numărul $a^{2^n} + b^{2^n}$ este rațional, oricare ar fi numărul natural n .

Problema 2.

Se consideră șirurile $(x_n), (y_n)$, definite prin $x_0 = 4, x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 3}, y_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n - 1}, n \geq 0$.

- Arătați că șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este o progresie geometrică.
- Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

Problema 3.

Un biolog care studiază dinamica numărului de păsări din stoluri a constatat că, în general, în fiecare minut după ridicarea de la sol, 10% din păsări părăsesc stolul și 30 de păsări întră în stol. El s-a decis să utilizeze această regulă în studiul său, cu convenția suplimentară că rezultatul acestui calcul pentru fiecare minut se aproximează prin lipsă la număr natural (aproximare prin lipsă la unitate).

- Dacă un stol are la ridicarea de la sol 200 de păsări, determinați câte păsări sunt în stol după trei minute.
- Arătați că pot exista stoluri al căror efectiv rămâne constant în timp.
- Aflați numărul de păsări la ridicarea de la sol a unui stol care după două minute are 110 păsări.

Problema 4

În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N astfel încât $\overline{AM} = m \cdot \overline{AB}$ și $\overline{AN} = n \cdot \overline{NC}$, unde m, n sunt numere reale cu $m, n \in (0, 1)$ și $m \neq \frac{n}{n+1}$.

- Exprimați vectorul \overline{MN} în funcție de vectorii \overline{AB} și \overline{AD} .
- Pentru $m = \frac{1}{3}$ și $n = \frac{2}{3}$, dacă notăm cu P punctul de intersecție al dreptelor MN și AD , determinați numărul întreg k pentru care $\overline{AP} = k \cdot \overline{AD}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.
Timpul de lucru este de 3 ore.