CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI" 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a X-a- Secțiunea H1

Problema 1.

a) Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Fie $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Problema 2.

Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2-(m+3i)z+(m+5)i+m+5$, unde m este un număr real.

a) Pentru $m=0$, calculați $f(i)-f(-i)$.

b) Aflați numerele reale m pentru care ecuația $f(z)=0$ are cel puțin o soluție reală.

c) Arătați că funcția $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g(z)=f(z)+f(\varepsilon z)+g(\varepsilon^2 z)$ nu este injectivă, unde ε este un număr complex cu $\varepsilon^3=1,\ \varepsilon\neq 1$.

Problema 3.

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$

a) Aflați $m,n\in\mathbb{R}$ știind că $f\left(x^2\cdot\sqrt[3]{y}\right)=m\cdot f(x)+n\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

b) Dacă $a,b\in(0,\infty)$ astfel încât $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, determinați $\dfrac{a}{b}$.

c) Demonstrați că, dacă $a,b\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, atunci $a\log_2 a+b\log_2 b\leq-(a+b)\log_2(a+b)$.

Problema 4.

a) În sistemul xOy se consideră un triunghi echilateral astfel încât afixele a două dintre vârfuri sunt $z_1=0, z_2=2$. Determinați afixul celui de-al treilea vârf al acestui triunghi.

b) Demonstrați că, dacă z_1,z_2,z_3 sunt numere complexe astfel încât $z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|$, atunci $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.*
Timpul de lucru este de 3 ore.