

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**“ADOLF HAIMOVICI” 2020**  
**Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020**  
**Clasa a XI-a**  
**Secțiunea H1**

**Problema 1.**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x \in (-\infty, 0) \\ x(ax - \sqrt{bx^2 + cx - 2}), & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ .

- a) Aflați numărul real  $a$  pentru care funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 0$ .  
b) Determinați numerele reale  $a, b, c$ ,  $b > 0$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .  
c) Pentru  $a = 0$ , determinați ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**Problema 2.**

Pentru fiecare număr natural  $n$  se consideră funcția  $f_n: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^2 - nx + 2}{x^2 - 1}$

- a) Calculați  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x)$ .  
b) Se notează  $g(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f_n(x))^x$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(1) + g(2) + \dots + g(n))$ .

**Problema 3.**

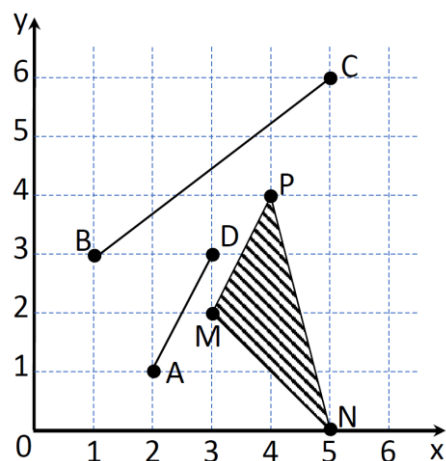
În mulțimea matricelor pătratice de ordin 2 se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 3 & y \end{pmatrix}$ , unde  $x, y$  sunt numere întregi.

- a) Determinați perechile de numere  $x, y$  pentru care  $A^2 = 7I_2$ .  
b) Determinați matricele  $A$  cu proprietatea că  $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det B$ , pentru orice matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
c) Demonstrați că  $\det(A^2 + A^{2020}) + \det(A^2 - A^{2020}) \geq 0$ , pentru orice numere întregi  $x, y$ .

**Problema 4.**

Figura următoare prezintă o schemă a planurilor de construcție a unor căi rutiere, cu următoarele convenții: drumurile sunt reprezentate prin segmente de dreaptă, punctele reprezintă orașe, o unitate de măsură a lungimii din figură corespunde la 10 km distanță reală, iar distanțele reale se aproximează prin rotunjire la numere întregi. Zona hașurată reprezintă suprafața împădurită.

- a) Calculați aria suprafeței împădurite.  
b) Dacă se prelungeste în linie dreaptă autostrada  $AD$ , la ce distanță de orașul  $C$  se vor intersecta cele două autostrăzi din figură?



**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.  
Timpul de lucru este de 3 ore.