

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI” 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a XII-a
Secțiunea H1

Problema 1.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \arcsin x - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Calculați $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

c) Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea $\int_1^4 f(x) dx = a + 4 \ln \frac{3}{2}$.

Problema 2.

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \ln(e^{-x} + 1) - e^{-x} \ln(e^x + 1) + m$,

$g(x) = e^x \ln(e^{-x} + 1) + e^{-x} \ln(e^x + 1)$, unde m este un număr real.

a) Determinați numărul real m știind că funcția g este o primitivă a funcției f .

b) Pentru $m = 2020$, determinați $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$.

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2} - \frac{x+y}{4} + \frac{5}{8}$ și se definește legea de compoziție $x \circ y = x * y * a$, unde a este un număr real.

a) Determinați simetricul elementului -1 în raport cu legea de compoziție “*”.

b) Știind că legea de compoziție “ \circ ” este asociativă, determinați numerele reale a pentru care ecuația $x \circ x \circ x \circ x = a$ are două soluții reale.

Problema 4.

Se consideră \mathbb{Z}_{23} (mulțimea claselor de resturi modulo 23) cu operațiile uzuale. Pentru criptarea mesajelor se folosește codificarea literă cu literă a cuvintelor, utilizând tabelul de mai jos

A	B	C	D	E	F	G	H	I,J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	X,Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

și cheia de criptare $\hat{c} = \hat{3} \cdot (m + \hat{5}) + 19$, unde m reprezintă numărul corespunzător literei în tabelul dat, iar operațiile se efectuează în \mathbb{Z}_{23} .

a) Determinați inversul elementului $\hat{3}$ în corpul $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$.

b) Scrieți codul corespunzător cuvântului MAT și aflați cuvântul ce are codul $(21; 7; 20)$.

c) Determinați cheia de decriptare a mesajelor ($m = f(\hat{c})$).

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.
Timpul de lucru este de 3 ore.