Olimpiada Națională de Matematică 2020

Etapa locală – Iași

17 ianuarie 2020

CLASA a XII -a

Problema 1. Fie grupul finit $(G,\cdot)$ de ordin n impar. Să se arate că funcția $f:G\to G$ cu proprietatea $f(xyz)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z), \forall x,y,z\in G$ este morfism.

Problema 2. Fie G o submulțime nevidă finită de numere complexe nenule. Se știe că înmulțirea este lege de compoziție pe mulțimea G. Demonstrați ca orice element din G are modulul egal cu 1 și $1\in G$.

Problema 3. Fie funcţia $f_\alpha:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{\ln x}, x\neq 1\\ \alpha, x=1\end{cases}$. Determinaţi numărul real α, astfel încât funcţia f_α să admită primitive pe $(0,+\infty)$.

Problema 4. a) Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int\frac{\cos(nx)}{\sin x}dx, n\geq 1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculaţi $J_n=\int\sin(nx)\cdot\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)dx, n\geq 1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro